

Emmanuel Hebey
Année 2024-2025

Algèbre bilinéaire
Examen Session 2
(Durée 1 heure 30)

(Le barème est donné à titre indicatif)
(Les documents et les calculatrices sont interdits)

Exercice 1: (5 pts) Soit $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$Q(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + 9z^2 - 4xy + 4xz - 2yz .$$

Déterminer le rang et la signature de Q . Vous serez précis dans votre raisonnement.

Correction: On écrit que

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= (x - 2y + 2z)^2 - 4y^2 - 4z^2 + 8yz + 5y^2 + 9z^2 - 2yz \\ &= (x - 2y + 2z)^2 + y^2 + 6yz + 5z^2 \\ &= (x - 2y + 2z)^2 + (y + 3z)^2 - 4z^2 . \end{aligned}$$

Soit \tilde{Q} la forme quadratique donnée par $\tilde{Q}(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z^2$. La signature de \tilde{Q} est $(2, 1)$. Son rang est $3 = 2 + 1$. Soit Φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 donné par

$$\Phi(x, y, z) = (x - 2y + 2z, y + 3z, z) .$$

La matrice de représentation de Φ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Cette matrice est triangulaire supérieure avec des 1 sur sa diagonale. Son déterminant vaut $1 \neq 0$. Donc Φ est un isomorphisme. On a $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$. Donc Q et \tilde{Q} sont équivalentes. Elles ont donc même rang et même signature. On en déduit que Q a pour signature $(2, 1)$ et rang 3.

Exercice 2: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire symétrique donnée par

$$\begin{aligned} B(x, y) &= 3x_1y_1 + 5x_2y_2 + (1 + \lambda)x_3y_3 + 2(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &\quad - (x_1y_3 + x_3y_1) + 3(x_2y_3 + x_3y_2) , \end{aligned}$$

où les x_i et y_i sont les coordonnées de x et y dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

(1) (3 pts) Pour quelles valeurs de λ la forme B définit-elle un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 ?

Correction: On admet (voir énoncé) que B est bilinéaire symétrique. Il reste à savoir sous quelle(s) condition(s) elle va être définie positive. On écrit que

$$\begin{aligned} B(x, x) &= 3x_1^2 + 5x_2^2 + (1 + \lambda)x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + 3x_2^2 + (1 + \lambda)x_3^2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + 3x_2^2 + \lambda x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + 3(x_2 + x_3)^2 + (\lambda - 3)x_3^2. \end{aligned}$$

Si $\lambda > 3$ alors $B(x, x) \geq 0$ pour tout x et $B(x, x) = 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

et donc si et seulement si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, soit $x = 0$. Donc B est un produit scalaire si $\lambda > 3$. Si $\lambda = 3$ on a bien que $B(x, x) \geq 0$ pour tout x mais il y a maintenant des vecteurs isotropes non nuls. Pour $x = (1, -1, 1)$ on par exemple que $B(x, x) = 0$ lorsque $\lambda = 3$. Donc B n'est pas définie positive et n'est pas un produit scalaire si $\lambda = 3$. Enfin, si $\lambda < 3$, on a $B(x, x) < 0$ si $x = (1, -1, 1)$. Donc B n'est pas positive et n'est pas un produit scalaire si $\lambda < 3$. Au final, B est un produit scalaire si et seulement si $\lambda > 3$.

(2) (3 pts) Soient u, v les deux vecteurs de \mathbb{R}^3 donnés par $u = (1, 1, 0)$ et $v = (1, 0, 1)$. On note E le sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 de base (u, v) , donc $E = \text{Vect}(u, v)$. On pose $\lambda = 4$. Trouver une base de E qui soit orthonormée pour B . On pourra noter $\langle \cdot, \cdot \rangle$ au lieu de B et $\| \cdot \|$ la norme associée.

Correction: Il est clair que (u, v) est libre, donc une base de $E = \text{Vect}(u, v)$. On utilise Gram-Schmidt pour orthonormaliser (u, v) . On a

$$\|u\|^2 = 3 + 5 + 0 + 4 - 0 + 0 = 12.$$

On pose

$$\tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{12}}u = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On pose maintenant

$$x = v - \langle \tilde{u}, v \rangle \tilde{u}.$$

On a

$$\begin{aligned}\langle \tilde{u}, v \rangle &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} [3 + 2 - 1 + 3] \\ &= \frac{7}{2\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{7}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5/12 \\ -7/12 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= 3 \times \left(\frac{5}{12}\right)^2 + 5 \times \left(-\frac{7}{12}\right)^2 + 5 \\ &\quad - 4 \times \frac{5 \times 7}{(12)^2} - 2 \times \frac{5}{12} - 6 \times \frac{7}{12} \\ &= \frac{1}{(12)^2} [75 + 245 + 720 - 140 - 120 - 504] \\ &= \frac{1040 - 764}{(12)^2} = \frac{276}{(12)^2}\end{aligned}$$

et on pose

$$\begin{aligned}\tilde{v} &= \frac{12}{\sqrt{276}} \times \begin{pmatrix} 5/12 \\ -7/12 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{69}} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La famille (\tilde{u}, \tilde{v}) est une base orthonormée de E pour B (lorsque $\lambda = 4$).

Exercice 3: (1) (3 pts) Soit A la matrice 2×2 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Quel théorème permet d'affirmer d'emblée que A est diagonalisable ? Calculer le polynôme caractéristique de A et trouver les valeurs propres de A . Trouver P orthogonale et D diagonale telles que $P^T A P = D$.

Correction: La matrice est symétrique. Le théorème spectral permet d'affirmer qu'elle est diagonalisable. Si P est le polynôme caractéristique de A ,

$$P(X) = \det \begin{pmatrix} -X & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 - X \end{pmatrix} = X(X - 1) - 2 = X^2 - X - 2 .$$

On remarque que $P(-1) = 0$. On en déduit que $P(X) = (X + 1)(X - 2)$. Les valeurs propres de A sont -1 et 2 . Soient E_{-1} et E_2 les espaces propres associés. On a

$$E_{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$$

et

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}y = -x \\ \sqrt{2}x + y = -y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = -\sqrt{2}y . \end{aligned}$$

Donc

$$E_{-1} = \left\{ y(-\sqrt{2}, 1), y \in \mathbb{R} \right\}$$

et E_{-1} est la droite vectorielle de vecteur directeur $u = (-\sqrt{2}, 1)$. On a

$$\|u\|^2 = 1 + 2 = 3 .$$

On pose

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Alors \hat{u} est un vecteur directeur de E_{-1} de norme 1. De même,

$$E_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$$

et

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}y = 2x \\ \sqrt{2}x + y = 2y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y = \sqrt{2}x . \end{aligned}$$

Donc

$$E_2 = \left\{ x(1, \sqrt{2}), x \in \mathbb{R} \right\}$$

et E_2 est la droite vectorielle de vecteur directeur $v = (1, \sqrt{2})$. On a

$$\|v\|^2 = 1 + 2 = 3 .$$

On pose

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Alors \hat{v} est un vecteur directeur de E_2 de norme 1. On pose

$$P = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

et alors, par théorème de cours, $P^T A P = D$ où $D = \text{diag}(-1, 2)$.

(2) (2 pts) On se donne $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et on définit par récurrence des vecteurs $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ en posant

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où A est comme à la question (1). Si P et D sont aussi comme à la question (1) on pose

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner l'expression de u_n et v_n en fonction de n , u_0 et v_0 .

Correction: On a $A = P D P^T$ et comme P est orthogonale,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

pour tout n . Par récurrence,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = D^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

On a $D^n = \text{diag}((-1)^n, 2^n)$. D'où $u_n = (-1)^n u_0$ et $v_n = 2^n v_0$ pour tout n .

Exercice 4: (4 pts) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et soit $f \in \text{End}(E)$ un endomorphisme symétrique de E . On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f répétées avec leur multiplicité (certains des λ_i peuvent donc être égaux entre eux) et on ordonne les λ_i de sorte que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Montrer que

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$$

pour tout $x \in E$.

Correction: C'est un des exercices du polycopié d'exercices corrigés mis en ligne. Le théorème spectral nous donne l'existence d'une base orthonormale (e_1, \dots, e_n) de E constituée de vecteurs propres de f , à savoir vérifiant que $f(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Soit $x \in E$ quelconque. On note x_i les coordonnées de x dans cette base. On a

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) &= \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
 \langle f(x), x \rangle &= \left\langle f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right), \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle \\
 &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i f(e_i), \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle \\
 &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2
 \end{aligned}$$

puisque (e_1, \dots, e_n) est orthonormale. Pour tout i , $\lambda_1 x_i^2 \leq \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n x_i^2$ et de plus $\|x\|^2 = \sum_i x_i^2$. Donc

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 \|x\|^2 &= \sum_{i=1}^n \lambda_1 x_i^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \\
 &= \langle f(x), x \rangle \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_n x_i^2 \\
 &= \lambda_n \|x\|^2 .
 \end{aligned}$$

D'où l'inégalité demandée.