

Contrôle Continu
Algèbre Bilinéaire

Sujets et Corrections

Année 2025-2026



Groupe L2 Maths
Groupe de Mr Hebey

Emmanuel Hebey
CC1 Algèbre bilinéaire
Année 2025-2026

**Algèbre bilinéaire CC1
(Durée 30 minutes)**

Le barème est donné à titre indicatif
Documents et calculatrices sont interdits
L'examen est noté sur 10.
Toute note supérieure à 10 est ramenée à 10.
La note finale sera ramenée à 20.

Exercice 1: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un réel et soit $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour $u = (x, y, z)$ par

$$Q(u) = x^2 + 2y^2 - 2(5 - \alpha)z^2 - 4xy + 6xz - 24yz .$$

(1) (1 pt) Pourquoi Q est-elle une forme quadratique ?

(2) (1 pt) Quelle est la forme bilinéaire symétrique B associée à Q ? Vous justifierez votre réponse et donnerez l'expression de $B(u, v)$ pour $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ dans \mathbb{R}^3 . Quelle est la matrice M de B dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 ?

I. On suppose dans cette partie que $\alpha = 0$.

(3) (3 pts) Ecrire Q sous la forme $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$, où \tilde{Q} est une forme quadratique facile à manipuler et Φ est un isomorphisme de \mathbb{R}^3 .

(4) (1 pt) Quelle est la signature de Q ? Quel est le rang de Q ?

II. On suppose dans cette partie que $\alpha = \frac{1}{2}$.

(5) (2 pts) Ecrire Q sous la forme $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$, où \tilde{Q} est une forme quadratique facile à manipuler et Φ est un isomorphisme de \mathbb{R}^3 .

(6) (1 pt) Quelle est la signature de Q ? Quel est le rang de Q ?

III. On suppose dans cette partie que $\alpha = 1$.

(7) (2 pts) En suivant les procédures des parties I et II, que vaut la signature de Q ?

Emmanuel Hebey
CC2 Algèbre bilinéaire
Année 2025-2026

Algèbre bilinéaire CC2
(Durée 30 minutes)

Le barème est donné à titre indicatif

Documents et calculatrices sont interdits

L'examen est noté sur 10.

Toute note supérieure à 10 est ramenée à 10.

La note finale sera ramenée à 20.

Exercice: (4 pts) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique donnée par

$$Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + \alpha z^2 + 2xy - 4xz - 8yz \quad .$$

Ecrire Q sous la forme $\tilde{Q} \circ \Phi$, où \tilde{Q} est une forme quadratique ne faisant intervenir que des carrés (donc sous forme Sylvester) et Φ est un isomorphisme de \mathbb{R}^3 . Déterminer, suivant les valeurs de α , la signature et le rang de Q . Vous justifierez vos développements.

Exercice 2: Soit $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$B(x, y) = 4x_1y_1 + 3x_2y_2 - 3(x_1y_2 + x_2y_1) \quad .$$

Dans tout ce qui suit vous justifierez vos développements.

(1) (1 pt) Montrer que B est un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 .

(2) (3 pts) Trouver une base orthonormée pour B .

(3) (2 pts) Si $x = (-1, 2)$, quelles sont les coordonnées de x dans la base que vous avez trouvée ?

Exercice 3: (2 pts) Soit $Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique donnée par

$$Q(x, y, z, t) = xy + 2xt \quad .$$

Que valent la signature et le rang de Q ? Vous justifierez vos développements.

**Durée 5 minutes de lecture sans écrire
puis 30 minutes de composition**

Le barème est donné à titre indicatif. Documents et calculatrices sont interdits.

L'examen est noté sur 10. Toute note supérieure à 10 est ramenée à 10.

La note finale sera ramenée à 20.

**Vous choisirez un seul des deux exercices
proposés et vous l'indiquerez en début de
copie.**

Exercice 1: On considère E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2 et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E . On note B la forme bilinéaire sur E définie par

$$B(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$$

pour tous $x = \sum_{i=1}^2 x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^2 y_i e_i$.

- (1) (1 pt) Montrer que B est un produit scalaire sur E .
- (2) (3 pts) Trouver une base $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ de E qui soit orthonormée pour B .
- (3) (4 pts) Soit $f \in \text{End}(E)$ l'endomorphisme de E dont la matrice de représentation dans \mathcal{B} est donné par

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si f^* est l'adjoint de f pour B , donner $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^*)$. L'endomorphisme f est-il auto-adjoint pour B ?

- (4) (3 pts) Etant donné $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on note f l'endomorphisme de E donné par

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Sous quelles conditions portant sur a, b, c, d l'endomorphisme f est-il auto-adjoint pour B ?

- (5) (1 pt) Soit $f \in \text{End}(E)$ donné par

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme f est-il auto-adjoint pour B ?

Exercice 2: On considère E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On définit la produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de E par

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 ,$$

où les x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées de x dans \mathcal{B} et les y_1, y_2, y_3 sont les coordonnées de y dans \mathcal{B} , de sorte que \mathcal{B} est orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $f \in \text{End}(E)$ l'endomorphisme de E donné dans \mathcal{B} par

$$f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (2x_1 + 2x_2 - 2x_3)e_1 + (2x_1 + 5x_2 - 4x_3)e_2 \\ - (2x_1 + 4x_2 - 5x_3)e_3 ,$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

- (1) (1 pt) Ecrire la matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de représentation de f dans \mathcal{B} . Peut-on dès maintenant en déduire que f est diagonalisable ?
- (2) (3 pts) Calculer le polynôme caractéristique P de f puis trouver les valeurs propres de f .
- (3) (3 pts) Trouver des bases des espaces propres de f .
- (4) (3 pts) Trouver des bases orthonormées des espaces propres de f .
- (5) (2 pts) Trouver une base orthonormée $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ de E qui diagonalise f . Ecrire la matrice de passage P de \mathcal{B} à $\tilde{\mathcal{B}}$. Que vaut l'inverse P^{-1} de P ?

Emmanuel Hebey
CC1 Algèbre bilinéaire
Année 2025-2026

Correction sommaire du CC1

(1) La forme Q est une forme quadratique car elle s'exprime comme un polynôme homogène de degré deux en les variables coordonnées.

(2) On considère $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$B(u, v) = xx' + 2yy' - 2(5 - \alpha)zz' - 2(xy' + x'y) \\ + 3(xz' + x'z) - 12(yz' + y'z) .$$

Alors B est bilinéaire symétrique et comme $Q(u) = B(u, u)$, c'est que B est la forme polaire de Q . La matrice de B dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 est la matrice

$$M_{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -12 \\ 3 & -12 & -2(5 - \alpha) \end{pmatrix} .$$

C'est la matrice des $B(e_i, e_j)$ où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Partie I

(3) On calcule

$$Q(u) = x^2 + 2y^2 - 10z^2 - 4xy + 6xz - 24yz \\ = (x - 2y + 3z)^2 - 4y^2 - 9z^2 + 12yz \\ + 2y^2 - 10z^2 - 24yz \\ = (x - 2y + 3z)^2 - 2y^2 - 12yz - 19z^2 \\ = (x - 2y + 3z)^2 - 2(y^2 + 6yz) - 19z^2 \\ = (x - 2y + 3z)^2 - 2(y + 3z)^2 - z^2 .$$

Soit $\tilde{Q} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\tilde{Q}(u) = x^2 - 2y^2 - z^2$$

et soit $\Phi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 donné par

$$\Phi(u) = (x - 2y + 3z, y + 3z, z) .$$

On a $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$ et si M est la matrice de représentation de Φ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , alors

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Le déterminant de M vaut $\det(M) = 1$. Donc Φ est un isomorphisme de \mathbb{R}^3 .

(4) Puisque $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$ et puisque Φ est un isomorphisme, les formes quadratiques Q et \tilde{Q} ont même signature. La forme quadratique \tilde{Q} est du type $\sum_i x_i^2$. Elle a pour signature $(1, 2)$. La signature de Q est donc $(1, 2)$. Le rang de Q est $3 = 1 + 2$.

Partie II

(5) On calcule

$$\begin{aligned} Q(u) &= x^2 + 2y^2 - 9z^2 - 4xy + 6xz - 24yz \\ &= (x - 2y + 3z)^2 - 4y^2 - 9z^2 + 12yz \\ &\quad + 2y^2 - 9z^2 - 24yz \\ &= (x - 2y + 3z)^2 - 2y^2 - 12yz - 18z^2 \\ &= (x - 2y + 3z)^2 - 2(y^2 + 6yz) - 18z^2 \\ &= (x - 2y + 3z)^2 - 2(y + 3z)^2 . \end{aligned}$$

Soit $\tilde{Q} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\tilde{Q}(u) = x^2 - 2y^2$$

et soit $\Phi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 donné par

$$\Phi(u) = (x - 2y + 3z, y + 3z, z) .$$

On a $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$ et si M est la matrice de représentation de Φ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , alors, comme dans la Partie I,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Le déterminant de M vaut $\det(M) = 1$. Donc Φ est un isomorphisme de \mathbb{R}^3 .

(6) Puisque $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$ et puisque Φ est un isomorphisme, les formes quadratiques Q et \tilde{Q} ont même signature. La forme quadratique \tilde{Q} est

du type $\sum_i x_i^2$. Elle a pour signature $(1, 1)$. La signature de Q est donc $(1, 1)$. Le rang de Q est $2 = 1 + 1$.

Partie III

(7) On calcule

$$\begin{aligned}
 Q(u) &= x^2 + 2y^2 - 8z^2 - 4xy + 6xz - 24yz \\
 &= (x - 2y + 3z)^2 - 4y^2 - 9z^2 + 12yz \\
 &\quad + 2y^2 - 8z^2 - 24yz \\
 &= (x - 2y + 3z)^2 - 2y^2 - 12yz - 17z^2 \\
 &= (x - 2y + 3z)^2 - 2(y^2 + 6yz) - 17z^2 \\
 &= (x - 2y + 3z)^2 - 2(y + 3z)^2 + z^2 .
 \end{aligned}$$

Soit $\tilde{Q} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\tilde{Q}(u) = x^2 - 2y^2 + z^2$$

et soit $\Phi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 donné par

$$\Phi(u) = (x - 2y + 3z, y + 3z, z) .$$

On a $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$ et si M est la matrice de représentation de Φ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , alors, comme dans la Partie I,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Le déterminant de M vaut $\det(M) = 1$. Donc Φ est un isomorphisme de \mathbb{R}^3 . Puisque $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$ et puisque Φ est un isomorphisme, les formes quadratiques Q et \tilde{Q} ont même signature. La forme quadratique \tilde{Q} est du type $\sum_i x_i^2$. Elle a pour signature $(2, 1)$. La signature de Q est donc $(2, 1)$. Le rang de Q est $3 = 2 + 1$.

Emmanuel Hebey
CC2 Algèbre bilinéaire
Année 2025-2026

Correction sommaire du CC2

Exercice 1: Soit $u = (x, y, z)$. On calcule

$$\begin{aligned} Q(u) &= x^2 + 3y^2 + \alpha z^2 + 2xy - 4xz - 8yz \\ &= (x + y - 2z)^2 - y^2 - 4z^2 + 4yz \\ &\quad + 3y^2 + \alpha z^2 - 8yz \\ &= (x + y - 2z)^2 + 2y^2 - 4yz + (\alpha - 4)z^2 \\ &= (x + y - 2z)^2 + 2(y - z)^2 + (\alpha - 6)z^2 . \end{aligned}$$

Soit $\tilde{Q} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\tilde{Q}(u) = x^2 + 2y^2 + (\alpha - 6)z^2$$

et soit $\Phi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 donné par

$$\Phi(u) = (x + y - 2z, y - z, z) .$$

On a $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$ et si M est la matrice de représentation de Φ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , alors, comme dans la Partie I,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Le déterminant de M vaut $\det(M) = 1$. Donc Φ est un isomorphisme de \mathbb{R}^3 . Puisque $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$ et puisque Φ est un isomorphisme, les formes quadratiques Q et \tilde{Q} ont même signature. La forme quadratique \tilde{Q} est du type $\sum_i x_i^2$. Elle a pour signature

$$\text{Sign}(Q) = \begin{cases} (3, 0) & \text{si } \alpha > 6 \\ (2, 0) & \text{si } \alpha = 6 \\ (2, 1) & \text{si } \alpha < 6 . \end{cases}$$

Le rang de Q est la somme des deux termes de la signature, donc $\text{Rg}(Q) = 3$ si $\alpha > 6$, $\text{Rg}(Q) = 2$ si $\alpha = 6$ et $\text{Rg}(Q) = 3$ si $\alpha < 6$.

Exercice 2: (1) Clairement B est bilinéaire symétrique. Reste à montrer que B est bilinéaire symétrique. On a

$$\begin{aligned} B(x, x) &= 4x_1^2 + 3x_2^2 - 6x_1x_2 \\ &= 3(x_1 - x_2)^2 + x_1^2 . \end{aligned}$$

Donc $B(x, x) \geq 0$ et $B(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

On revient aux notations classiques. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ au lieu de B et $\| \cdot \|$ la norme associée.

(2) On applique Gram-Schmidt. On calcule $\|e_1\|^2 = 4$. On pose

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

On pose maintenant pour vecteur intermédiaire

$$x = e_2 - \langle e_2, \tilde{e}_1 \rangle \tilde{e}_1 .$$

On calcule

$$\langle e_2, \tilde{e}_1 \rangle = \frac{-3}{2}$$

et donc

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 - 6 \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} . \end{aligned}$$

On pose

$$\tilde{e}_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

La famille $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^2 pour B .

(3) Comme $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est orthonormée, les coordonnées \tilde{x}_1 et \tilde{x}_2 de x dans $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ sont données (par théorème de cours) par

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \langle x, \tilde{e}_1 \rangle \\ \tilde{x}_2 = \langle x, \tilde{e}_2 \rangle . \end{cases}$$

On calcule

$$\begin{aligned} \langle x, \tilde{e}_1 \rangle &= \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} [-4 - 6] \\ &= -5 \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}\langle x, \tilde{e}_2 \rangle &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[-3 + 6 + 3 - \frac{9}{2} \right] \\ &= \sqrt{3} .\end{aligned}$$

Les coordonnées de x dans $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ sont donc $(-5, \sqrt{3})$.

Exercice 3: Soit $u = (x, y, z, t)$. On écrit que

$$\begin{aligned}Q(u) &= x(y + 2t) \\ &= \frac{1}{4}(x + y + 2t)^2 - \frac{1}{4}(x - y - 2t)^2 .\end{aligned}$$

Soit $\tilde{Q} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\tilde{Q}(u) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2$$

et soit $\Phi \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 donné par

$$\Phi(u) = (x + y + 2t, x - y - 2t, z, t) .$$

On a $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$ et si M est la matrice de représentation de Φ dans la base canonique de \mathbb{R}^4 , alors, comme dans la Partie I,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Le déterminant de M vaut

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 .$$

Donc $\det(M) \neq 0$ et donc Φ est un isomorphisme de \mathbb{R}^4 . Puisque $Q = \tilde{Q} \circ \Phi$ et puisque Φ est un isomorphisme, les formes quadratiques Q et \tilde{Q} ont même signature. La forme quadratique \tilde{Q} est du type $\sum_i x_i^2$. Elle a pour signature $(1, 1)$. La signature de Q est donc $(1, 1)$. Le rang de Q est $2 = 1 + 1$.

Emmanuel Hebey
CC3 Algèbre bilinéaire
Année 2025-2026

Correction sommaire du CC3

Exercice 1: (1) Il est clair que B est bilinéaire symétrique. Il reste à montrer que B est définie positive. Soit $u = (x_1, x_2)$. On a

$$\begin{aligned} B(u, u) &= x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2. \end{aligned}$$

Donc $B(u, u) \geq 0$ pour tout u et $B(u, u) = 0$ si et seulement si $u = 0$. On en déduit que B est un produit scalaire.

On revient aux notations classiques. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ au lieu de B et $\| \cdot \|$ la norme associée.

(2) On utilise Gram-Schmidt. On calcule $\|e_1\|^2 = 1$. On pose

$$\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On pose maintenant pour vecteur intermédiaire

$$x = e_2 - \langle e_2, \tilde{e}_1 \rangle \tilde{e}_1.$$

On calcule

$$\langle e_2, \tilde{e}_1 \rangle = 1$$

et donc

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= 1 + 3 - 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

On pose

$$\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^2 pour B .

(3) Soit P la matrice de passage de \mathcal{B} à $\tilde{\mathcal{B}}$. Alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de P vaut $\det(P) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et, par formule de cours de l'inversion des matrices 2×2 ,

$$P^{-1} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par formule de changement de base (cours d'algèbre linéaire du 1er semestre),

$$\begin{aligned} M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) &= P^{-1}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)P \\ &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La base $\tilde{\mathcal{B}}$ est orthonormée pour B . Donc

$$\begin{aligned} M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f^*) &= M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Toujours avec la formule de changement de base on en déduit que

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^*) &= PM_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f^*)P^{-1} \\ &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(4) Là encore avec la formule de changement de bases,

$$\begin{aligned}
 M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f) &= P^{-1}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)P \\
 &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b-a}{\sqrt{2}} \\ c & \frac{d-c}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{a+c}{\sqrt{2}} & \frac{b-a+d-c}{2} \\ c & \frac{d-c}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

La base $\tilde{\mathcal{B}}$ est orthonormée pour B . Donc f est auto-adjoint pour B si et seulement si $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ est symétrique et donc si et seulement si $\frac{b-a+d-c}{2} = c$ soit encore si et seulement si

$$b + d = a + 3c.$$

(5) Solution 1: On applique la question 4. On a $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 1$. Donc $b + d = 4$ et $a + 3c = 4$. Il suit que

$$b + d = a + 3c$$

et donc f est bien auto-adjoint.

Solution 2: Sans avoir la question 4, et par définition première des endomorphismes auto-adjoints, f est auto-adjoint si et seulement si pour tous x, y, x', y' ,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (0.1)$$

On calcule

$$\begin{aligned}
 \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} x + 3y \\ x + y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= (x + 3y)x' + 3(x + y)y' + (x + 3y)y' + (x + y)x' \\
 &= 2xx' + 6yy' + 4xy' + 4x'y.
 \end{aligned}$$

En inversant les rôles de (x, y) et (x', y') ,

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle = 2x'x + 6y'y + 4x'y + 4xy'.$$

On constate que les deux expressions pour ces deux produits scalaires sont égales. Donc (0.1) est vraie pour tous x, y, x', y' . Il suit que f est auto-adjoint pour B .

Exercice 2: Il s'agit de l'exercice 3.40 du polycopié d'exercices corrigés.

(1) On a

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} .$$

La matrice est symétrique ET \mathcal{B} est orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Donc f est auto-adjoint pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la théorème spectral donne (en particulier) que f est diagonalisable.

(2) On calcule le polynôme caractéristique de f . Il est donné (développement en étoile) par

$$\begin{aligned} P(X) &= \begin{vmatrix} 2-X & 2 & -2 \\ 2 & 5-X & -4 \\ -2 & -4 & 5-X \end{vmatrix} \\ &= -(X-2)(X-5)^2 + 16 + 16 - 4(5-X) - 16(2-X) - 4(5-X) \\ &= -(X-2)(X-5)^2 + 24X - 40 \\ &= -(X-2)(X^2 - 10X + 25) + 24X - 40 \\ &= -X^3 + 10X^2 - 25X + 2X^2 - 20X + 50 + 24X - 40 \\ &= -X^3 + 12X^2 - 21X + 10 . \end{aligned}$$

On remarque que $P(1) = 0$. Donc il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$P(X) = -(X-1)(aX^2 + bX + c) .$$

La comparaison des termes en X^3 donne que $a = 1$ et la comparaison des termes constants donne que $c = 10$. Si on compare maintenant les termes en X on doit avoir $-21 = -c + b$ et on trouve donc que $b = -11$. Donc $P(X) = -(X-1)Q(X)$ avec $Q(X) = X^2 - 11X + 10$. On constate que $Q(1) = 0$. Donc $Q(X) = (X-1)(X-10)$. Par suite P se factorise en

$$P(X) = -(X-1)^2(X-10) .$$

Les valeurs propres de f sont 1 (valeur propre double) et 10 (valeur propre simple).

(3) Soient E_1 et E_{10} les espaces propres associés. On sait déjà que E_{10} est de dimension 1, et comme f est diagonalisable E_1 est forcément de dimension 2 (cours du 1er semestre, multiplicités polynômiales et

algébriques coïncident pour les endomorphismes diagonalisables). On a que

$$E_1 = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 / \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} .$$

Et

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + 2y = 2z .$$

Donc

$$\begin{aligned} E_1 &= \{2(z - y)e_1 + ye_2 + ze_3, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2e_1 + e_2) + z(2e_1 + e_3), y, z \in \mathbb{R}\} . \end{aligned}$$

Soit $u = -2e_1 + e_2$ et $v = 2e_1 + e_3$. Alors $u(-2, 1, 0)$, $v(2, 0, 1)$ et $E_1 = \text{Vect}(u, v)$. Donc (u, v) est génératrice pour E_1 . On sait que E_1 est de dimension 2. Donc (u, v) est une base de E_1 (famille libre ou génératrice à n vecteurs en dimension n est une base, cours du 1er semestre). Donc E_1 est le plan vectoriel de base (u, v) . Par ailleurs,

$$E_{10} = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 / \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} .$$

Et

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + y = z \\ 2x - 5y = 4z \\ 2x + 4y = -5z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + y = z \\ 2x - 5y = 4z \\ 9y = -9z \text{ (L3 - L2)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ z = -2x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = -2x \end{cases} . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E_{10} &= \{xe_1 + 2xe_2 - 2xe_3, x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(e_1 + 2e_2 - 2e_3), x \in \mathbb{R}\} . \end{aligned}$$

Soit $w = e_1 + 2e_2 - 2e_3$. Alors $w(1, 2, -2)$ et E_{10} est la droite vectorielle de base (vecteur directeur) w .

(4) On orthonormalise (u, v) avec Gram-Schmidt et on normalise w . On a $\|u\|^2 = 5$. On pose

$$\tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}u \text{ soit } \tilde{u} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On pose maintenant

$$x = v - \langle v, \tilde{u} \rangle \tilde{u}.$$

On calcule $\langle v, \tilde{u} \rangle = -\frac{4}{\sqrt{5}}$. Donc

$$x = v + \frac{4}{\sqrt{5}}\tilde{u}$$

et on a ainsi que

$$x = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$\|x\|^2 = \frac{4}{25} + \frac{16}{25} + 1 = \frac{9}{5}$$

et on pose

$$\tilde{v} = \frac{\sqrt{5}}{3}x, \text{ soit } \tilde{v} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Alors (\tilde{u}, \tilde{v}) est une base orthonormale de E_1 . Il reste à normaliser w . On calcule $\|w\|^2 = 9$ et on pose ainsi

$$\tilde{w} = \frac{1}{3}w \text{ soit } \tilde{w} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(5) Les espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux. La famille $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ est donc une famille orthonormée de 3 vecteurs, elle est ainsi libre et c'est donc une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . Elle diagonalise f . La matrice de passage de \mathcal{B} à $\tilde{\mathcal{B}}$ est la matrice

$$P = M_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$