

Durée 1 heure 30

Le barème est donné à titre indicatif

Les documents et les calculatrices sont interdits

Exercice 1: (5 pts) Soit $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$Q(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + 9z^2 - 4xy + 4xz - 2yz .$$

Déterminer le rang et la signature de Q . Vous serez précis dans votre raisonnement.

Exercice 2: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire symétrique donnée par

$$B(x, y) = 3x_1y_1 + 5x_2y_2 + (1 + \lambda)x_3y_3 + 2(x_1y_2 + x_2y_1) \\ - (x_1y_3 + x_3y_1) + 3(x_2y_3 + x_3y_2) ,$$

où les x_i et y_i sont les coordonnées de x et y dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

(1) (3 pts) Pour quelles valeurs de λ la forme B définit-elle un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 ?

(2) (3 pts) Soient u, v les deux vecteurs de \mathbb{R}^3 donnés par $u = (1, 1, 0)$ et $v = (1, 0, 1)$. On note E le sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 de base (u, v) , donc $E = \text{Vect}(u, v)$. On pose $\lambda = 4$. Trouver une base de E qui soit orthonormée pour B . On pourra noter $\langle \cdot, \cdot \rangle$ au lieu de B et $\| \cdot \|$ la norme associée.

Exercice 3: (1) (3 pts) Soit A la matrice 2×2 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

Quel théorème permet d'affirmer d'emblée que A est diagonalisable ? Calculer le polynôme caractéristique de A et trouver les valeurs propres de A . Trouver P orthogonale et D diagonale telles que ${}^tPAP = D$.

(2) (2 pts) On se donne $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et on définit par récurrence des vecteurs $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ en posant

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où A est comme à la question (1). Si P et D sont aussi comme à la question (1) on pose

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner l'expression de u_n et v_n en fonction de n , u_0 et v_0 .

Exercice 4: (4 pts) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et soit $f \in \text{End}(E)$ un endomorphisme symétrique de E . On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f répétées avec leur multiplicité (certains des λ_i peuvent donc être égaux entre eux) et on ordonne les λ_i de sorte que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Montrer que

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$$

pour tout $x \in E$.