Emmanuel Hebey | **Algèbre linéaire 3**
Année 2024-2025 | **Examen Session 2**

Durée 1 heure 30

Le barème est donné à titre indicatif

Les documents et calculatrices sont interdits

Exercice: (5 pts) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathrm{Rg}(A) \geq 2$. Pour quelles valeurs de a et b va-t-on avoir que $\mathrm{Rg}(A) = 2$?

Problème: Soient $a, \alpha \in \mathbb{R}$ deux réels et soit $f_{a,\alpha} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$f_{a,\alpha}(x, y, z) = (ax + z, 2x + \alpha y + 2z, -x + z) \ .$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

PARTIE I: On suppose dans toute cette partie que $a = 3$. On note f_α au lieu de $f_{3,\alpha}$.

(1) (1 pt) Ecrire la matrice de représentation A_α de f_α dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ (au départ et à l'arrivée).

(2) (2 pts) Calculer le polynôme caractéristique P_α de f_α, vérifier que $P_\alpha(\alpha) = 0$ et déterminer les valeurs propres de f_α.

(3) (2 pts) On suppose que $\alpha = 2$. Expliquer, sans faire de calculs, pourquoi f_2 ne peut pas être diagonalisable.

(4) (2 pts) On suppose que $\alpha \neq 2$. Montrer que là encore f_α n'est pas diagonalisable.

PARTIE II: On revient dans cette partie à l'application linéaire $f_{a,\alpha}$ avec $a, \alpha \in \mathbb{R}$ quelconques.

(5) (2 pts) Soit $P_{a,\alpha}$ le polynôme caractéristique de $f_{a,\alpha}$. Vérifier que $P_{a,\alpha}(\alpha) = 0$. Ecrire $P_{a,\alpha}$ sous la forme $P_{a,\alpha}(X) = -(X - A)(X^2 + BX + C)$ avec $A, B, C \in \mathbb{R}$ que l'on déterminera.

(6) (2 pts) Montrer que $f_{a,\alpha}$ est diagonalisable dès que $\alpha^2 \neq (a + 1)(\alpha - 1)$ et $a \in \,]-\infty, -1[\, \bigcup \,]3, +\infty[$.

(7) (1 pt) Montrer, avec un argument très simple, que $f_{a,\alpha}$ n'est pas diagonalisable, et ce quel que soit la valeur de α, si $a \in]-1, 3[$.

(8) (3 pts) Montrer que $f_{a,\alpha}$ n'est pas diagonalisable, et ce quel que soit la valeur de α, si $a \in \{-1, 3\}$. On pourra distinguer suivant que $\alpha = \frac{a+1}{2}$ ou non.