

Durée 1 heure 30

Le barème est donné à titre indicatif  
Les documents et calculatrices sont interdits

**Exercice 1:** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  le polynôme réel donné par

$$P(X) = X^3 + 5X^2 + 8X + 4 .$$

(1) (1 pt) Calculer  $P(-1)$  puis factoriser  $P$  en facteurs irréductibles.

(2) (5 pts) Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{2x^4 + 13x^3 + 34x^2 + 43x + 17}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} dx .$$

Vous justifierez les différentes étapes de vos calculs et raisonnements.

**Exercice 2:** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  deux réels avec  $b > 0$ . On note  $I_{a,b}$  et  $J_{a,b}$  les intégrales généralisées

$$I_{a,b} = \int_0^{+\infty} \frac{a^4 x^2 + 2x + 1}{2x^b + 5} dx \quad \text{et} \quad J_{a,b} = \int_0^1 \frac{(a \cos(x) - 1)^2 \sin^2(x)}{x^b} dx ,$$

et on note  $f_{a,b}, g_{a,b}$  les fonctions qui sont intégrées dans  $I_{a,b}$  et  $J_{a,b}$ .

(1) (2 pts) En distinguant selon que  $a = 0$  ou  $a \neq 0$ , pour quelles valeurs de  $b$  l'intégrale  $I_{a,b}$  est-elle convergente ?

(2) (3 pts) En distinguant selon que  $a = 1$  ou  $a \neq 1$ , pour quelles valeurs de  $b$  l'intégrale  $J_{a,b}$  est-elle convergente ?

**Exercice 3:** (2 pts) Soit  $f : \mathbb{R}^{+\ast} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{3x^7 + x^5 + 1}{2x^7 + 3} + \frac{(x^2 + 1) \cos(x)}{x^4 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} \sin(x) .$$

L'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  est-elle convergente ?

**Exercice 4:** (4 pts) Pour  $n \in \mathbb{N}^\ast$  on note

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{nx^2 + 2nx + 1}{x^5 + nx(x+2)^3 + 1} dx .$$

Montrer que  $I_n$  a une limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  et calculer cette limite. Vous justifierez les différentes étapes de vos calculs et raisonnements.

**Exercice 5:** (1) (2 pts) Calculer  $I = \int \int_D x^2 y dx dy$  où  $D$  est l'ensemble des  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  qui sont tels que  $0 \leq x \leq 1$  et  $x^2 \leq y \leq x$ .

(2) (1 pt) On note maintenant  $\tilde{D}$  l'ensemble des  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  qui sont tels que  $-1 \leq x \leq 1$  et  $x^2 \leq y \leq x$ . Que vaut  $J = \int \int_{\tilde{D}} x^2 y dx dy$  ?