Emmanuel Hebey | **Probabilités**
Année 2024-2025 | **Examen Session 2**

Durée 1 heure 30
Le barème est donné à titre indicatif
Documents et calculatrices sont interdits

Notation: Dans tout le sujet, étant donnés $p < q$ dans $\mathbb{Z}$, $[\![p, q]\!]$ désigne l'ensemble fini $\{p, p+1, \ldots, q\}$.

Exercice 1: Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité fini, $a \in [0,1]$ un réel à déterminer et $X : \Omega \to [\![-2, 2]\!]$ une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, à valeurs dans $[\![-2, 2]\!]$, dont la loi est donnée par le tableau

k	-2	-1	0	1	2
$P_X(k)$	0,3	0,1	a	0,1	0,3

(1) (1 pt) Quelle valeur faut-il donner à a pour que les $p_k = P_X(k)$ du tableau correspondent bien à une probabilité sur $[\![-2, 2]\!]$?

(2) (1 pt) Que vaut l'espérance de X ?

(3) (2 pts) Déterminer la loi de X^2.

(4) (1 pt) Que vaut la variance de X ?

(5) (1 pt) Que vaut la variance de $2X + 7$?

(6) (3 pts) Que vaut la variance de $2X^2 + 3$?

(7) (2 pts) Soit $Y : \Omega \to \{0, 1\}$ une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p pour $p \in]0, 1[$. Donc $P(Y = 1) = p$ et $P(Y = 0) = 1 - p$ pour $p \in]0, 1[$. On pose $Z = XY$ de sorte que $Z : \Omega \to [\![-2, 2]\!]$ est encore une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, à valeurs dans $[\![-2, 2]\!]$. On suppose que la loi de Z est donnée par le tableau

k	-2	-1	0	1	2
$P_Z(k)$	$0,1 \times p$	$0,1 \times p$	$1 - 0,6 \times p$	$0,2 \times p$	$0,2 \times p$

Que vaut la covariance $\mathrm{Cov}(X, Y)$ de X et Y ? Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

(8) (2 pts) Que valent, en fonction de p, l'espérance et la variance de la variable aléatoire $X + Y$? Pour quelle(s) valeur(s) de p la variance de $X + Y$ vaut-elle $\mathrm{Var}(X + Y) = 1,75$?

Quelques résultats de calculs utiles (et d'autres qui ne le sont pas) pour palier à l'absence de calculatrice: $(1,1)^2 = 1,21$; $(0,8)^2 = 0,64$; $(1,2)^2 = 1,44$; $(2,6)^2 = 6,76$; $7 \times 1,21 = 8,47$; $16 \times 0,2 = 3,2$; $7,5 - 3,6 = 3,9$; $3,6 - 1,44 = 2,16$; $9,8 - 6,76 = 3,04$; $(1,6)^2 = 2,56$; $2,7 - 0,56 = 2,14$; $16 \times 2,16 = 34,56$; $4 \times 0,28 = 1,12$; $16 \times 0,6 = 9,6$; $4 \times 3,04 = 12,16$; $(1,4)^2 = 1,96$; $2,88 - 2,6 = 0,28$; $(0,6)^2 = 0,36$; $2,56 - 1,12 = 1,44$.

Exercice 2: (3 pts) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,2]\!]$. On suppose que $\mathbb{E}(X)=1$ et $\mathrm{Var}(X)=\frac{1}{2}$. Déterminer la loi de X.

Exercice 3: Soient $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ un espace de probabilité fini, $n\in\mathbb{N}^\star$ un entier non nul et $X:\Omega\to\mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$. Si $x_1,\dots,x_n$ sont les valeurs prises par X on note $p_i=P(X=x_i)$ pour tout $i=1,\dots,n$. On définit l'entropie de X par la formule

$$\mathrm{Ent}(X)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\ln(p_i)$$

avec la convention que $x\ln(x)=0$ si $x=0$.

(1) (1 pt) Montrer que $\mathrm{Ent}(X)\geq 0$ et que $\mathrm{Ent}(X)=0$ si et seulement si il existe un $i\in[\![0,n]\!]$ pour lequel $p_i=1$.

(2) (1 pt) Montrer que $-x\ln(x)\leq 1-x$ pour tout $x>0$ avec égalité si et seulement si $x=1$. En déduire que $-np_i\ln(np_i)\leq 1-np_i$ pour tout $i\in[\![0,n]\!]$.

(3) (1 pt) Montrer que $\mathrm{Ent}(X)\leq\ln(n)$. On pourra utiliser la question (2).

(4) (1 pt) Montrer que $\mathrm{Ent}(X)=\ln(n)$ si et seulement si X suit la loi uniforme, et donc si et seulement si $p_i=\frac{1}{n}$ pour tout $i\in[\![0,n]\!]$.