

Emmanuel Hebey  
TD N<sup>o</sup>1  
Année 2026-2027

Algèbre linéaire 3  
Feuille d'exercices 1

Ces exercices portent sur le programme de 1<sup>ère</sup> année, possiblement avant que les rappels de cours sur le sujet n'aient été faits. Des indications sont donc données.

**Exercice 1:** Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?

1.  $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$ .
2.  $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 4\}$ .
3.  $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ .
4.  $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ .

**Exercice 2:** On considère dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ . Les familles suivantes sont-elles libres ?

1.  $(e_1, 2e_2, e_3)$ .
2.  $(e_1, e_3)$ .
3.  $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$ .
4.  $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$ .
5.  $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$ .

On rappelle qu'une famille  $(e_1, \dots, e_n)$  de vecteurs est dite libre si pour tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , l'égalité

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$$

implique que, forcément,  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . On rappelle aussi que toute sous famille d'une famille libre est forcément elle aussi libre.

**Exercice 3:** On considère dans  $\mathbb{R}^3$  les vecteurs  $v_1 = (1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (4, 1, 4)$  et  $v_3 = (2, -1, 4)$ .

1. Montrer que les familles  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_1, v_3)$  et  $(v_2, v_3)$  sont libres.
2. La famille  $(v_1, v_2, v_3)$  est-elle libre ?

**Exercice 4:** Soit  $E$  l'espace des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que les familles  $(\cos(x), \sin(x))$  et  $(\cos(x), \sin(x), \sin(2x))$  sont libres.

**Exercice 5:** Soit  $E$  le sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  donné par

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 0\} .$$

Trouver une base de  $E$ . On utilisera ici qu'une famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base d'un espace vectoriel  $E$  si pour tout vecteur  $u$  de  $E$  il existe des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  pour lesquels  $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$  (on dit que la famille est génératrice) et si, en plus, la famille est libre.

**Exercice 6:** Soient  $F$  et  $G$  deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Montrer que deux quelconques des propriétés suivantes entraînent la troisième.

1.  $F \cap G = \{0\}$ ,
2.  $F + G = E$ ,
3.  $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ .

On rappelle la formule:  $\dim(A + B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$ .

**Exercice 7:** Soient  $F$  et  $G$  deux sous espaces vectoriels de dimension 3 de  $\mathbb{R}^5$ . La somme  $F + G$  peut-elle être directe ? On rappelle que la somme  $F + G$  est directe si et seulement si  $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$ .

#### D'AUTRES EXERCICES POSSIBLES

**Exercice 8:** Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?

1.  $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y + 3z = 0\}$ .
2.  $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y + 3z = 1\}$ .
3.  $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 y = 0\}$ .
4.  $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^3\}$ .

**Exercice 9:** On considère dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ . Les familles suivantes sont-elles libres ?

1.  $(4e_1, 2e_2, 2e_3)$ .
2.  $(e_1, 2e_3)$ .
3.  $(e_1, 2e_1 + 3e_4, e_4)$ .

**Exercice 10:** Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On considère les fonctions  $u$ ,  $v$  et  $w$  définies par  $u(x) = e^x$ ,  $v(x) = x^2$  et  $w(x) = \cos(x)$  pour tout  $x$ . Montrer que  $(u, v, w)$  est libre.

**Exercice 11:** Soit  $E$  le sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  donné par

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x + 2y - 4z = 0\} .$$

Trouver une base de  $E$ .