

Algèbre linéaire 3
Feuille d'exercices 2

Exercice 1: Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ trois réels non tous nuls. Par exemple $c \neq 0$. Soit E le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz = 0\} .$$

- (1) Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- (2) Trouver une base de E . De quelle dimension est E ?
- (3) Soient $a', b', c' \in \mathbb{R}$ trois autres réels non tous nuls. Donner un argument simple permettant de justifier que

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases} \right\}$$

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- (4) Dans le cas particulier où

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

donner une base de F . De quelle dimension est F ?

- (5) On revient à la question (3). Quelles sont les dimensions possibles pour F ? Donner un exemple pour chacune des dimensions potentielles.

Exercice 2: Trouver une base des sous espaces E et F de $\mathbb{R}^4$ donnés par

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 3x + 2y - 4z - t = 0\}$$

et

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} 3x + 2y - 4z - t = 0 \\ 2x + y + z - t = 0 \end{cases} \right\} .$$

De quelles dimensions sont ces espaces ?

Exercice 3: Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par ses valeurs dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ par $f(e_1) = e_1 + 2e_2 + 4e_3$, $f(e_2) = 2e_1 + e_2 - e_3$ et $f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$.

- 1. Donner une base de $\text{Ker}(f)$. L'endomorphisme f est-il injectif ?
- 2. Le théorème du rang donne que $\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim(\mathbb{R}^3)$. Donner une base de $\text{Im}(f)$.
- 3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Exercice 4: Soient $E, F \subset \mathbb{R}^4$ les sous espaces de $\mathbb{R}^4$ donnés par

$$E = \text{Vect}((1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1)) \text{ et } F = \text{Vect}((1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0)) .$$

Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^4$.

Exercice 5: Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3, F un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 4, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4)$ une base de F . On note $f \in L(E, F)$ l'application linéaire de E dans F définie par

$$f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = (2x_1 + 3x_2 - x_3)\tilde{e}_1 + (4x_1 - 5x_2 + 3x_3)\tilde{e}_2 \\ + (x_1 - 7x_2 + 3x_3)\tilde{e}_3 + (3x_1 + 2x_2 + 5x_3)\tilde{e}_4$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Ecrire la matrice de représentation $M_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}(f)$ de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$. Caractériser $\text{Ker}(f)$. Dire si f est injective ou pas. Caractériser $\text{Im}(f)$.

Exercice 6: Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donné par

$$T(M) = M - \text{tr}(M)A,$$

où $\text{tr}(M)$ est la trace de M . Montrer que T est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 1$.

D'autres exercices possibles

Exercice 7: (1) On considère deux vecteurs u et v dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que ni u ni v ne sont le vecteur nul et on note dans ce qui suit $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$. On suppose qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $u_{i_0} = 0$ et $v_{i_0} \neq 0$. Montrer que (u, v) est alors libre.

(2) On considère trois vecteurs u, v, w dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que ni u ni v ni w ne sont le vecteur nul. On note $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$. On suppose qu'il existe $i_0, i_1 \in \{1, \dots, n\}$ tels que $u_{i_0} = u_{i_1} = v_{i_0} = 0$, $w_{i_0} \neq 0$ et $v_{i_1} \neq 0$. Montrer que (u, v, w) est alors libre.

(3) Construire trois vecteurs u, v, w dans l'espace $\mathbb{R}^3$ du type $u = (0, a, b)$, $v = (c, 0, d)$ et $w = (e, f, 0)$, avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}^*$ (donc des réels tous non nuls) avec la propriété que la famille (u, v, w) est liée. En déduire que la position décalée des zéro garantissant le fait que la famille soit libre ne marche telle quelle qu'avec deux vecteurs.

Exercice 8: (1) Soient $E, F \subset \mathbb{R}^3$ les sous espaces de $\mathbb{R}^4$ donnés par

$$E = \text{Vect}((1, 1, 0)) \text{ et } F = \text{Vect}((1, 0, 1), (1, 1, 1)).$$

Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

(2) Soient $E, F \subset \mathbb{R}^4$ les sous espaces de $\mathbb{R}^4$ donnés par

$$E = \text{Vect}((1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1)) \text{ et } F = \text{Vect}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)).$$

Montrer que la somme $E + F$ n'est pas directe et caractériser $E + F$. En donner une base et sa dimension.