

Algèbre linéaire 3
Feuille d'exercices 3

Exercice 1: Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3, F un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 4, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4)$ une base de F . On note $f, g \in L(E, F)$ les applications linéaires de E dans F définies par

$$\begin{aligned} f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &= (x_1 - 2x_2 + x_3)\tilde{e}_1 + (3x_1 - 4x_3)\tilde{e}_2 \\ &\quad + (2x_1 + 3x_2 + 7x_3)\tilde{e}_3 + (3x_1 - x_2 - 5x_3)\tilde{e}_4 \\ g(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &= (2x_1 - 4x_2 + 2x_3)\tilde{e}_1 + (2x_1 + 5x_2 - 7x_3)\tilde{e}_2 \\ &\quad + (5x_1 - x_2 - 4x_3)\tilde{e}_3 + (x_1 - 6x_2 + 5x_3)\tilde{e}_4 \end{aligned}$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Ecrire les matrices de représentation $M_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}(f)$ de f dans $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$ et $M_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}(g)$ de g dans $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$. Caractériser $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(g)$. Dire si f et g sont injectives. Caractériser $\text{Im}(f)$ et $\text{Im}(g)$.

Exercice 2: Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On note $f, g \in \text{End}(E)$ les endomorphismes de E définis pour tout $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ de E par

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x_1 - x_2 + 3x_3)e_1 + (3x_1 - 2x_2 + 4x_3)e_2 + (2x_1 + 3x_2 + x_3)e_3 \\ g(x) &= (x_1 - x_2 + x_3)e_1 + (5x_1 - 4x_2 + 3x_3)e_2 + (5x_1 - 3x_2 + x_3)e_3 . \end{aligned}$$

Ecrire les matrices de représentation $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de f dans $\mathcal{B}$ et $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g)$ de g dans $\mathcal{B}$. Caractériser $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(g)$. Dire si f et g sont injectives. Caractériser $\text{Im}(f)$ et $\text{Im}(g)$. A-t-on $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$? Caractériser l'espace $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$. Mêmes questions avec g .

Exercice 3: Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E . On note $f \in \text{End}(E)$ l'endomorphisme de E dont la matrice de représentation dans $\mathcal{B}$ vaut

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. A-t-on $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$?

Exercice 4: Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Caractériser $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 5: On considère les applications linéaires $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ données par $f(x, y, z) = (2x - z, 3x + y + 2z)$ pour tous $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, et par $g(x, y) = (x + y, -y, 2x - y)$ pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
(1) Déterminer les matrices de représentation A et B de f et g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

(2) Calculer les matrices AB , BA et $(AB)^2$.

(3) Expliciter les applications $f \circ g$, $g \circ f$ et $(f \circ g)^2$.

Exercice 6: Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E . Soit $f \in \text{End}(E)$ un endomorphisme de E . On note M sa matrice de représentation dans $\mathcal{B}$.

(1) On suppose que $n = 2$ et que

$$M = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ \beta & -1 \end{pmatrix},$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Quelle relation doivent vérifier les réels α et β pour que $M^2 + 2M - I_2 = 0$, où I_2 est la matrice identité 2×2 et où 0 est la matrice nulle 2×2 ? Donner un exemple de matrice M pour laquelle on a bien cette relation.

(2) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifient la relation trouvée en (1), pour quelles valeurs de $\gamma \in \mathbb{R}$ la matrice 3×3 donnée par

$$M = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ \beta & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

satisfait-elle la relation $M^2 + 2M - I_3 = 0$, où I_3 est la matrice identité 3×3 et où 0 est la matrice nulle 3×3 ?

(3) On revient au cas n quelconque et on suppose que $M^2 + 2M - I_n = 0$, où I_n est la matrice identité $n \times n$ et où 0 est la matrice nulle $n \times n$. Montrer que f est un isomorphisme de E . Que vaut la matrice de représentation de f^{-1} dans $\mathcal{B}$?