Emmanuel Hebey **Algèbre linéaire 3**
Feuille d'exercices 4
Année 2026-2027

Exercice 1: Trouver toutes les matrices 2×2 qui commutent avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Parmi ces matrices, quelles sont celles qui vérifient que $M^2 + M = I_2$, où I_2 est la matrice identité 2×2. Si une matrice M carrée d'ordre 2 vérifie $M^2 + M = I_2$, quel est l'inverse de M ?

Exercice 2: On considère $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par $f(e_1) = e_1 + e_3$, $f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3$ et $f(e_3) = -e_2$.

(1) Ecrire la matrice de représentation de f dans (e_1, e_2, e_3). Déterminer le noyau de f et l'image de f.

(2) On pose $\tilde{e}_1 = e_1 - e_3$, $\tilde{e}_2 = e_1 - e_2$ et $\tilde{e}_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. La famille $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

(3) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.

(4) En utilisant la formule de changement de bases pour les matrices de représentation, calculer la matrice de représentation de f dans $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$. Quelles sont les coordonnées de $f(2\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + 3\tilde{e}_3)$ dans $\tilde{\mathcal{B}}$?

Exercice 3: Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $\tilde{e}_1 = e_1 + e_2$, $\tilde{e}_2 = e_1 + e_3$ et $\tilde{e}_3 = e_1 - e_2 + e_3$.

(1) Montrer que $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.

(3) Que vaut la matrice de représentation de f dans cette base ?

Exercice 4: Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice de représentation dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On définit

$$\hat{e}_1 = e_2 + e_3, \hat{e}_2 = e_1 + e_3, \hat{e}_3 = e_1 + e_2$$
$$\hat{e}'_1 = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_2), \hat{e}'_2 = \frac{1}{2}(e'_1 - e'_2) \ .$$

Montrer que $\hat{\mathcal{B}} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\hat{\mathcal{B}}' = (\hat{e}'_1, \hat{e}'_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de représentation de f dans ces nouvelles bases.

Exercice 5: On considère $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par $f(e_1) = e_3$, $f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ et $f(e_3) = e_3$.

(1) Ecrire la matrice de représentation de f dans (e_1, e_2, e_3). Déterminer le noyau de f et l'image de f.

(2) On pose $\tilde{e}_1 = e_1 - e_3$, $\tilde{e}_2 = e_1 - e_2$ et $\tilde{e}_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. On sait depuis l'exercice 2 que la famille $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de représentation de f dans $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$.

Exercice 6: Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

On pose $\tilde{e}_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $\tilde{e}_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ et $\tilde{e}_3 = e_1 + e_2 + 2e_3$. On admet que $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Que vaut la matrice de représentation de f dans cette base ?

Exercice 7: Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est à diagonale dominante si $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ pour tout i. Montrer que A est inversible.