

Emmanuel Hebey
TD N°5
Année 2026-2027

Algèbre linéaire 3
Feuille d'exercices 5

Exercice 1: Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $\tilde{e}_1 = e_1 + e_2$, $\tilde{e}_2 = e_1 + e_3$ et $\tilde{e}_3 = e_1 - e_2 + e_3$. On admet que $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$

- (1) Ecrire et inverser la matrice $M_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}}$.
- (2) Que vaut la matrice de représentation de f dans $\tilde{\mathcal{B}}$?

Exercice 2: Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On note $f, g \in \text{End}(E)$ les endomorphismes de E définis par

$$\begin{aligned} f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) &= (x_1 + 4x_2 + x_3)e_1 + (4x_1 + 3x_3)e_2 \\ &\quad + (-x_1 + 3x_2 - 2x_3)e_3 \\ g(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) &= (3x_1 - x_3)e_1 + (2x_1 + 4x_2 + 2x_3)e_2 \\ &\quad + (5x_1 + 4x_2 + x_3)e_3 \end{aligned}$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

- (1) Ecrire les matrice de représentation de f et g dans $\mathcal{B}$.
- (2) Calculer les déterminants $\det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f))$ et $\det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g))$. Les endomorphismes f et g sont-ils des isomorphismes ?

Exercice 3: Soit A une matrice carrée dont tous les coefficients sont entiers, à savoir dans $\mathbb{Z}$. Montrer que A est inversible d'inverse une matrice à coefficients entiers si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

Exercice 4: Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant que

$$A^3 - A^2 + A = I_n .$$

Montrer que A est inversible. Quelle est son inverse ? En utilisant l'exercice précédent, sachant que $\det(A) > 0$, calculer le déterminant de A si A est à coefficients entiers dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 5: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soient aussi E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On note $f \in \text{End}(E)$ l'endomorphisme de E défini par

$$f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (x_1 + \alpha x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + 2x_2 + x_3)e_2 + (2x_1 + x_2 + x_3)e_3$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme f est-il un isomorphisme ? Par ailleurs, et lorsque f n'est pas isomorphisme, caractériser $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 6: Soit A une matrice carrée d'ordre n . On suppose qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ qui est tel que $(I_n + A)^N = 0$ (la matrice nulle $n \times n$), où I_n est la matrice identité $n \times n$. Montrer que A est forcément inversible. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Quel est son inverse ? Pour ces questions on pourra utiliser le fait que la formule du binôme de Newton permettant de développer des sommes $(A + B)^N$ est valable pour des matrices carrées A et B lorsque ces matrices commutent et donc lorsque $AB = BA$.

Exercice 7: Soit A une matrice carrée d'ordre n . On suppose que le système $AX = 0$ d'inconnue X , où X est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ et 0 est le vecteur nul colonne de $\mathbb{R}^n$, a pour seule solution $X = 0$. Peut-on affirmer que A est inversible ?