

Emmanuel Hebey
TD N°6
Année 2026-2027

Algèbre linéaire 3
Feuille d'exercices 6

Exercice 1: Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$f(P) = (1 + X)P' + 2P + 6\left(\int_0^1 P(t)dt\right)(X^2 + X + 1) .$$

(1) Ecrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de f dans les bases $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée. L'application linéaire f est-elle un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}_2[X]$?

(2) On pose

$$\begin{cases} Q_1 = 1 + X + X^2 \\ Q_2 = 1 - X + X^2 \\ Q_3 = 2 + X + X^2 \end{cases}$$

Montrer que $\tilde{\mathcal{B}} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(3) Décrivez une procédure simple pour exprimer les valeurs de $f(Q_1)$, $f(Q_2)$ et $f(Q_3)$ en fonction de Q_1 , Q_2 et Q_3 .

(4) Effectuer les calculs demandés à la question précédente.

Exercice 2: Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deux paramètres réels. On considère la matrice $A_{\alpha, \beta}$ réelle 3×3 donnée par

$$A_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Pour quelles valeurs de α et β cette matrice est-elle inversible ?

(2) On suppose que $\alpha = 1$ et $\beta = 2$. Soit f l'ALCA de $A_{1,2}$. Caractériser $\text{Ker}(f)$.

(3) On suppose que $\alpha = 2$ et $\beta = 1$. Soit f l'ALCA de $A_{2,1}$. Caractériser $\text{Ker}(f)$.

Exercice 3: Soient A et B les matrices 3×3 données par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $P(x) = \det(A - xI_3)$ et $Q(x) = \det(B - xI_3)$, où I_3 est la matrice identité 3×3 .

(1) Calculer $P(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et vérifier que $P(2) = 0$. Factoriser P .

(2) Calculer $Q(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et vérifier que $Q(1) = 0$. Factoriser Q .

Exercice 4: Soit A la matrice 3×3 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer les 9 mineurs Δ_{ij} de A et le déterminant de A . Montrer que A est inversible et donner sa matrice A^{-1} .

Exercice 5: On considère n^2 fonctions continues $a_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, où donc $i, j = 1, \dots, n$. On suppose que la matrice $A(0) = (a_{ij}(0))$ est inversible. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ qui est tel que $A(x) = (a_{ij}(x))$ est encore inversible si $|x| < \delta$.

Exercice 6: Calculer les déterminants des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7: On note A la matrice 4×4 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on note f l'ALCA de A . On assimile les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ au quadruplé (a, b, c, d) de $\mathbb{R}^4$. Que vaut, via cette assimilation, $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en termes de matrices 2×2 . Etant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, résoudre le système $f(M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$.