Emmanuel Hebey **Année 2026-2027**
TD N^{0}7 bis **Algèbre linéaire 3**

Feuille d'exercices 7 bis

Exercice 1: Soit A la matrice 3×3 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer le rang de A et si f est l'ALCA de A, déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

(2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

(3) A-t-on que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$? Que vaut la somme $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$?

Exercice 2: Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit de plus $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E. On suppose que $f \neq 0$ (à savoir que f n'est pas l'application linéaire nulle) mais que $f^2 = 0$ l'est (où $f^2 = f \circ f$).

(1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ et que $\mathrm{Ker}(f) \neq E$.

(2) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. En déduire qu'on ne peut pas avoir que $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 1$. Dès lors, que vaut $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$? Et que vaut le rang $\mathrm{Rg}(f)$ de f ?

(3) On considère $u \in \mathrm{Im}(f)$ avec $u \neq 0$. Quel théorème permet d'affirmer qu'il existe $v \in \mathrm{Ker}(f)$ avec la propriété que (u, v) forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$? Soit $w \in E$ qui est tel que $f(w) = u$. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de E.

(4) Que vaut la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de f dans $\mathcal{B}$?

(5) Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui est non nulle mais telle que $A^2 = 0$ est semblable à la matrice 3×3 dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient sur la première ligne et troisième colonne qui vaut 1.

Exercice 3: Soient $p, q \in \mathbb{N}^\star$ deux entiers non nuls. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ une matrice à p lignes et q colonnes. On note $L_1, \ldots, L_p$ les lignes de A (que l'on regarde comme des vecteurs de $\mathbb{R}^q$) et $C_1, \ldots, C_q$ les colonnes de A (que l'on regarde comme des vecteurs de $\mathbb{R}^p$);

(1) Montrer que

$$\begin{aligned} \mathrm{Rg}(A) &= \dim\big(\mathrm{Vect}(L_1, \ldots, L_p)\big) \\ &= \dim\big(\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_q)\big) \ , \end{aligned}$$

où $\mathrm{Rg}(A)$ désigne le rang de A.

(2) Montrer que l'on ne change pas le rang de A si l'on échange deux lignes ou deux colonnes de A. Montrer que multiplier une ligne ou une colonne par un réel non nul ne change pas non plus le rang de A. Montrer enfin que l'on ne change pas le rang de A si l'on soustrait à l'une de ses lignes un multiple d'une autre ligne ou à l'une de ses colonnes un multiple d'une autre colonne.

(3) Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit A' la matrice 4×4 donnée par

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix} .$$

En considérant les opérations $L_2 - aL_1$, $L_3 - a^2L_1$, $L_4 - a^3L_1$, calculer le rang de A selon les différentes valeurs possibles de a.

Exercice 4: Trouver un exemple de matrice triangulaire supérieure 3×3 dont les coefficients diagonaux ne sont pas tous nuls, dont les lignes sont toutes non nulles et dont le rang n'est ni le nombre de termes diagonaux non nuls ni 3, le nombre de lignes non nulles. En déduire qu'il est faux de dire (comme on le trouve malheureusement quelques fois sur internet) que le rang d'une matrice triangulaire est égal au nombre de coefficients non nuls sur sa diagonale ou alors (on trouve aussi cela sur internet) égal au nombre de ses lignes non nulles.

Exercice 5: **(1)** Soient $p, s, q \in \mathbb{N}^\star$ des entiers non nuls, $A \in \mathcal{M}_{p,s}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{s,q}(\mathbb{R})$ et $C = AB$. Dans quel espace de matrices se trouve C ? Montrer que $\mathrm{Rg}(C) \leq \min\big(\mathrm{Rg}(A), \mathrm{Rg}(B)\big)$, où $\mathrm{Rg}(A)$ désigne le rang de A, $\mathrm{Rg}(B)$ celui de B et $\mathrm{Rg}(C)$ celui de C.

(2) Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} ,$$

où $x \in \mathbb{R}$. Que vaut x ?