Emmanuel Hebey
TD N^{0}8
Année 2026-2027

Algèbre linéaire 3
Feuille d'exercices 8

Exercice 1: Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in End(E)$ un endomorphisme de E. On suppose que $f^3 \equiv f^2$, $f \not\equiv \mathrm{Id}_E$, $f^2 \not\equiv 0$ et $f^2 \not\equiv f$, où la notation f^k signifie $f \circ \cdots \circ f$ (k fois).

(1) Montrer que les seules valeurs propres possibles de f sont 0 et 1.

(2) Montrer que 0 et 1 sont bien des valeurs propres de f.

(3) Montrer qu'il n'existe pas de base $\tilde{\mathcal{B}}$ de E pour laquelle la matrice $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ est diagonale car sinon on aurait que f^2 et f coïncident.

Exercice 2: Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f \in End(\mathbb{R}^2)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice de représentation dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} .$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de a et montrer l'existence d'une valeur critique a_0 (que l'on calculera) pour laquelle f n'a pas de valeur propre réelle si $a < a_0$, a exactement une valeur propre réelle si $a = a_0$ (on donnera la valeur de cette valeur propre) et a exactement deux valeurs propres réelles si $a > a_0$ (on donnera les valeurs de ces deux valeurs propres).

(2) Expliquer pourquoi il n'existe pas de base $\tilde{\mathcal{B}}$ de $\mathbb{R}^2$ pour laquelle la matrice $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ est diagonale réelle si $a < a_0$. Expliquer pourquoi non plus il n'existe pas de base $\tilde{\mathcal{B}}$ de $\mathbb{R}^2$ pour laquelle la matrice $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ est diagonale réelle si $a = a_0$.

On suppose dans ce qui suit que $a = 3$.

(3) Déterminer les deux espaces propres E_1 et E_2 de f (on en donnera des bases) et vérifier (sans faire appel au théorème de cours correspondant) que l'on a bien que $\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_2$.

(4) Donner une base de $\mathbb{R}^2$ qui diagonalise f, à savoir trouver une base $\tilde{\mathcal{B}}$ de $\mathbb{R}^2$ pour laquelle la matrice $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ est diagonale.

Exercice 3: Soit $f \in End(\mathbb{R}^2)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice de représentation dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Montrer qu'il n'existe pas de base $\tilde{\mathcal{B}}$ de $\mathbb{R}^2$ pour laquelle la matrice $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ est diagonale.

Exercice 4: Soit $f \in End(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice de représentation dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} .$$

Trouver les valeurs propres de f et déterminer les espaces propres correspondants. Trouver une base $\tilde{\mathcal{B}}$ de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle la matrice $M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ est diagonale.