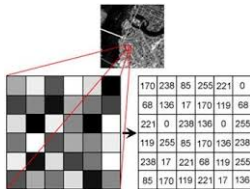




Algèbre bilinéaire:
E. Hebey
Avril 2026
Tomographie et
Compression

Qu'est-ce qu'une image numérique.

Une image numérique ou digitale est une matrice. On parle d'image matricielle (ou d'image bitmap). Ce sont les images que l'on retrouve sur les écrans. Chaque case (élément) de la matrice est un pixel. Leur nombre va constituer la définition de l'image. Pour une image binaire en noir et blanc, un pixel peut prendre uniquement les valeurs noir ou blanc. Si on se restreint aux images en niveaux de gris, chaque pixel prend une valeur comprise entre zéro (pixel noir) et 255 (pixel blanc). Il y a donc 256 teintes de gris.



Pour le codage couleur (dont on ne parlera pas) on utilise le procédé RGB (Red, Green, Blue) qui donne en fait trois matrices pour chacune des couleurs avec des entrées de 0 à 255. Ce qu'on appelle un pixel d'écran est alors composé de trois leds des trois couleurs RGB.

Sur la définition (nombre de pixels) des écrans

La full HD des téléviseurs modernes propose 1920×1080 pixels (2.073.600 pixels). La définition standard des DVD propose 720×576 pixels. La Ultra HD 4K propose 3840×2160 pixels. La Ultra HD 8K propose 7680×4320 pixels. On parle donc de matrices 7680×4320 (soit 33.177.600 éléments).

La série des Apple II marquent l'entrée fracassante d'Apple dans le marché de l'ordinateur personnel. L'Apple II sorti en 1977 est l'un des premiers ordinateurs personnels au monde fabriqué à grande échelle. L'Apple IIe (1983) proposait une définition de 280×192 pixels. La révolution du MAC classique au tout début des année 90 proposera 512×342 pixels (sur un écran de 9 pouces), ce qui était considéré comme exceptionnel à l'époque.



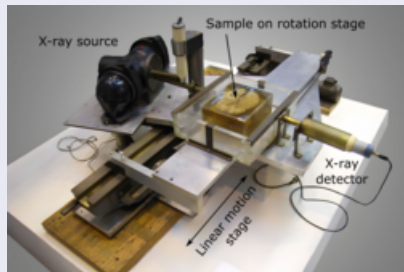
Apple IIe (1983)



Mac Classic (1990)

Partie I

A l'origine de la tomographie



Dans le langage courant on parle d'images générées par scanner, de scanographie, mais le terme exact est tomographie ou, en anglais, "computed tomography" ("tomos" en grec signifie section, "grapho" en grec signifie écrire, par glissement décrire et il s'agit donc de décrire à partir de sections). Le principe est simple :

- 1 - Projeter des rayons X sur une forme sous différents angles
- 2 - Calculer l'intensité des images projetées
- 3 - Utiliser ces intensités calculées pour reconstruire la forme initiale.

Il va falloir plusieurs rayons sous différents angles car sinon on se retrouve avec le problème des ombres chinoises : l'image projetée ne correspond pas à la réalité :



La question est la suivante :

*Comment récupérer la forme
à partir de différentes mesures ?*

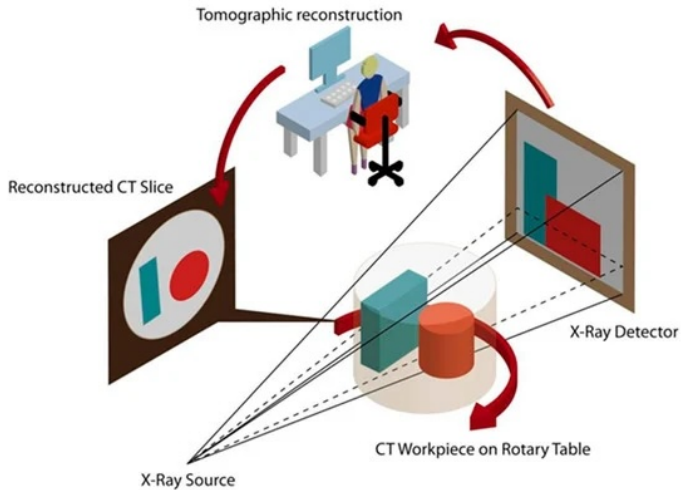
On discretise pour ramener le problème à un problème fini. Le plan est découpé en une grille fine, l'espace en une grille 3D, la densité étant constante (supposée constante) sur chaque cellule. On envoie des rayons X sous différents "angles" θ . On récupère autant de données b_θ parasitées par un bruit parasite ν_θ qui sort de toute mesure. Si d_i est la densité pour la i ème cellule, et si a_i est la longueur parcourue par le rayon pour traverser cette cellule, alors

$$b_\theta \sim \sum_{i \in \text{Grille}} a_i d_i + \nu_\theta .$$

Différentes mesures (n mesures obtenues par n changement "d'angle" θ) donnent

$$b_k \sim \sum_{i \in \text{Grille}} a_i d_i + \nu_k$$

pour $k = 1, \dots, n$. Si la grille (2D ou 3D) possède p cellules, les a_i sont connus (ils ne dépendent pas de la forme placée sur la grille) et pour chaque "angle" θ on lit les a_i concernés et on prend 0 pour les autres.



On choisit $n \gg p$. On cherche alors à résoudre un problème $Ad = b$ avec A matrice $n \times p$, $d \in \mathbb{R}^p$ et $b \in \mathbb{R}^n$. En bref on cherche donc à minimiser $\|Ad - b\|^2$ sur d , c'est un problème de moindres carrés.

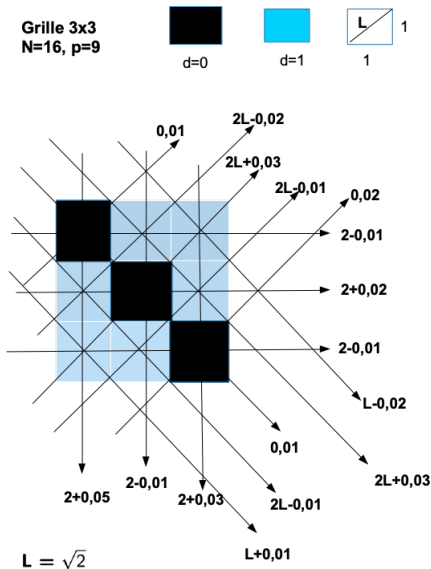
Abordons un cas d'école inspiré de l'exemple 2×2 de Changho Suh. On présente ici un "toy model" 2D très simple mais assez parlant. Il est facilement complexifiable avec des grilles plus grandes, de la 3D et des "objets" plus complexes.



La grille et l'objet

On dispose ici d'une grille 3×3 de cellules de côtés 1. Un objet occupe 3 cellules. On envoie des rayons X suivant les directions Ouest-Est (3 rayons), Nord-Sud (3 rayons), Sud Ouest - Nord Est (diagonale et petites diagonales, 5 rayons) puis enfin Nord Ouest - Sud Est (diagonale et petites diagonales, 5 rayons). Les rayons X sont absorbés lorsqu'ils traversent l'objet ($d = 0$) et restent intacts (on prendra $d = 1$) en traversant les autres cases.

L'intensité est la densité fois la longueur parcourue. Les décimales représentent les erreurs de mesures dans les relevés (le bruit ν).



Grille 3×3 , 9 cases, 16 mesures ($n = 16$, $p = 9$). Cases numérotées de gauche à droite en partant de la case en, haut à gauche.

C1	C2	C3
C4	C5	C6
C7	C8	C9

Ecriture matricielle du problème :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1,99 \\ 2,02 \\ 1,99 \\ 2,05 \\ 1,99 \\ 2,03 \\ 0,01 \\ 2,81 \\ 2,86 \\ 2,82 \\ 0,02 \\ 1,39 \\ 2,86 \\ 0,01 \\ 2,82 \\ 1,42 \end{pmatrix}$$

Solution recherchée : (0 1 1 1 0 1 1 1 0)

Lemme 4

L'équation $Ax = b$, qui est sur-déterminée, n'a pas de solution.

Preuve : Les lignes 7, 11, 12 et 16 donnent $d_1 = 0,01$, $d_3 = 1,39$, $d_7 = 1,42$ et $d_9 = 0,02$. La ligne 14 donne

$$d_1 + d_5 + d_9 = 0,01$$

et donc $d_5 = -0,02$. Si l'on regarde maintenant la ligne 9 on devrait avoir $d_3 + d_5 + d_7 = 2,86$ alors que les valeurs précédentes donnent $d_3 + d_5 + d_7 = 2,79$. Il n'y a pas de solution exacte au problème. \boxtimes

On recherche la solution au sens des moindres carrés en calcul direct.
Outil en ligne : dcode (inversion et produits de matrices).
<https://www.dcode.fr/>

Etape 1 - Calcul du produit $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Etape 2 - Calcul du déterminant de $A^T A$: $\det(A^T A) = 61740$, donc $A^T A$ est inversible. La formule $A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$ s'applique.

Etape 3 - Calcul de l'inverse $(A^T A)^{-1}$:

$$(A^T A)^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{143}{420} & -\frac{11}{140} & -\frac{17}{420} & -\frac{11}{420} & -\frac{1}{28} & \frac{9}{140} & -\frac{17}{420} & \frac{9}{140} & -\frac{37}{420} \\ -\frac{11}{140} & \frac{143}{420} & -\frac{11}{140} & -\frac{17}{420} & -\frac{1}{28} & -\frac{17}{420} & \frac{9}{140} & -\frac{37}{420} & \frac{9}{140} \\ -\frac{17}{420} & -\frac{11}{140} & \frac{143}{420} & \frac{9}{140} & -\frac{1}{28} & -\frac{11}{140} & -\frac{37}{420} & \frac{9}{140} & -\frac{17}{420} \\ -\frac{11}{140} & -\frac{17}{420} & \frac{9}{140} & \frac{143}{420} & -\frac{1}{28} & -\frac{37}{420} & -\frac{11}{140} & -\frac{17}{420} & \frac{9}{140} \\ -\frac{1}{28} & -\frac{1}{28} & -\frac{1}{28} & -\frac{1}{28} & \frac{9}{28} & -\frac{1}{28} & -\frac{1}{28} & -\frac{1}{28} & -\frac{1}{28} \\ \frac{9}{140} & -\frac{17}{420} & -\frac{11}{140} & -\frac{37}{420} & -\frac{1}{28} & \frac{143}{420} & \frac{9}{140} & -\frac{17}{420} & -\frac{11}{140} \\ -\frac{17}{420} & \frac{9}{140} & -\frac{37}{420} & -\frac{11}{140} & -\frac{1}{28} & \frac{9}{140} & \frac{143}{420} & -\frac{11}{140} & -\frac{17}{420} \\ \frac{9}{140} & -\frac{37}{420} & \frac{9}{140} & -\frac{17}{420} & -\frac{1}{28} & -\frac{17}{420} & -\frac{11}{140} & \frac{143}{420} & -\frac{11}{140} \\ -\frac{37}{420} & \frac{9}{140} & -\frac{17}{420} & \frac{9}{140} & -\frac{1}{28} & -\frac{11}{140} & -\frac{17}{420} & -\frac{11}{140} & \frac{143}{420} \end{pmatrix}$$

Etape 4 - Calcul du pseudo-inverse $A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$:

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{31}{140} & -\frac{1}{20} & -\frac{9}{140} & \frac{31}{140} & -\frac{1}{20} & -\frac{9}{140} & \frac{143}{420} & -\frac{11}{70} & -\frac{7}{60} & \frac{9}{70} & -\frac{37}{420} & -\frac{17}{420} & -\frac{1}{70} & \frac{13}{60} & -\frac{1}{70} & -\frac{17}{420} \\ \frac{11}{60} & -\frac{7}{60} & \frac{17}{420} & -\frac{23}{420} & \frac{13}{60} & -\frac{23}{420} & -\frac{11}{140} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{20} & -\frac{9}{70} & \frac{9}{140} & -\frac{11}{140} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{20} & -\frac{9}{70} & \frac{14}{140} \\ \frac{31}{140} & -\frac{1}{20} & -\frac{9}{140} & -\frac{9}{140} & -\frac{1}{20} & \frac{31}{140} & -\frac{17}{140} & -\frac{1}{70} & \frac{13}{60} & -\frac{1}{70} & -\frac{17}{420} & \frac{143}{420} & -\frac{11}{70} & -\frac{7}{60} & \frac{9}{70} & -\frac{37}{420} \\ -\frac{23}{420} & \frac{13}{60} & -\frac{23}{420} & \frac{11}{60} & -\frac{7}{60} & \frac{17}{420} & -\frac{11}{140} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{20} & -\frac{9}{70} & \frac{9}{140} & \frac{9}{140} & -\frac{9}{70} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{10} & -\frac{11}{140} \\ -\frac{3}{28} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{28} & -\frac{3}{28} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{28} & -\frac{1}{28} & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{28} & -\frac{1}{28} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{28} \\ -\frac{23}{420} & \frac{13}{60} & -\frac{23}{420} & \frac{17}{420} & -\frac{7}{60} & \frac{11}{60} & \frac{9}{140} & -\frac{9}{70} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{10} & -\frac{11}{140} & -\frac{11}{140} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{20} & -\frac{9}{70} & \frac{14}{140} \\ -\frac{9}{140} & -\frac{1}{20} & \frac{31}{140} & \frac{31}{140} & -\frac{1}{20} & -\frac{9}{140} & -\frac{17}{140} & -\frac{1}{70} & \frac{13}{60} & -\frac{1}{70} & -\frac{17}{420} & \frac{37}{420} & \frac{9}{60} & -\frac{7}{60} & -\frac{11}{70} & \frac{143}{420} \\ \frac{17}{420} & -\frac{7}{60} & \frac{11}{60} & -\frac{23}{420} & \frac{13}{60} & -\frac{23}{420} & \frac{9}{140} & -\frac{9}{70} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{10} & -\frac{11}{140} & \frac{9}{140} & -\frac{9}{70} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{10} & -\frac{11}{140} \\ -\frac{9}{140} & -\frac{1}{20} & \frac{31}{140} & -\frac{9}{140} & -\frac{1}{20} & \frac{31}{140} & -\frac{37}{420} & \frac{9}{70} & -\frac{7}{60} & -\frac{11}{70} & \frac{143}{420} & -\frac{17}{420} & -\frac{1}{70} & \frac{13}{60} & -\frac{1}{70} & -\frac{17}{420} \\ -\frac{9}{140} & -\frac{1}{20} & \frac{31}{140} & -\frac{9}{140} & -\frac{1}{20} & \frac{31}{140} & -\frac{37}{420} & \frac{9}{70} & -\frac{7}{60} & -\frac{11}{70} & \frac{143}{420} & -\frac{17}{420} & -\frac{1}{70} & \frac{13}{60} & -\frac{1}{70} & -\frac{17}{420} \end{pmatrix}$$

Etape 5 - Calcul de la solution :

La solution exacte (à $\nu = 0$, que l'on ne connaît pas a priori) est :

$$(0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0)$$

Solution donnée par la résolution du problème des moindres carrés :

$$d = (A^T A)^{-1} A^T b ,$$

soit ici

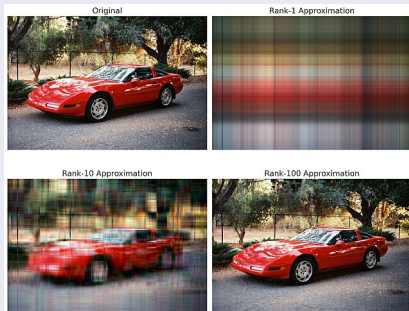
$$(-0.17 \quad 1.23 \quad 1.23 \quad 1.24 \quad -0.05 \quad 1.26 \quad 1.26 \quad 1.21 \quad -0.17)$$

en arrondie à 10^{-2} .

On retrouve clairement la forme recherchée : elle se trouve en C1, C5,C9.

Partie II

Algorithme SVD et compression d'images



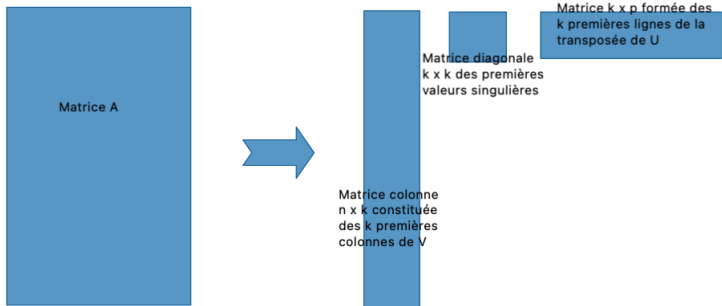
Soient u_i les colonnes de U et v_i les colonnes de V . La SVD $A = V\Sigma_r U^T$ donne une écriture de A sous la forme d'une somme de matrices de rang 1, les $v_i u_i^T \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, écriture qui est donnée par

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i v_i u_i^T$$

L'énergie de l'image, définie comme étant la trace de $A^T A$, est alors donnée par la somme des σ_i^2 . La stratégie de compression SVD consiste à ne retenir que les "grandes" valeurs des σ_i , celles que l'on trouve pertinentes. Etant donné $k \in \mathbb{N}^*$ la compression SVD- k ne va donc retenir que la somme de $i = 1$ à k des $\sigma_i v_i u_i^T$. L'image (en niveaux de gris) est donnée par A , les entrées étant comprises entre 0 (noir) et 255 (blanc). Ne retenir que les k premiers σ_i ($k \leq r$) revient à compresser A en remplaçant A par le produit des k premières colonnes de V , de la matrice diagonale formée avec les k premières valeurs de σ_i (les σ_i sont en ordre décroissant) et des k premières lignes de U^T . On récupère une matrice de même nature $n \times p$, mais beaucoup plus "légère".

Compression SVD-k

$$A = V \Sigma_r U^T$$



$$n \times p \Rightarrow (n + p + 1) \times k$$

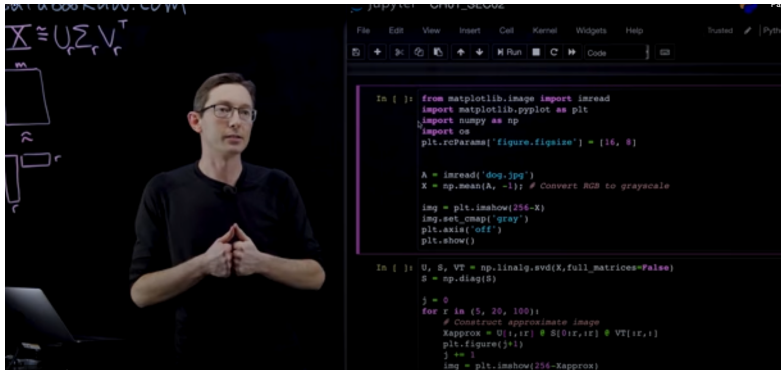
Pourcentage de pixels retenus :

$$C = \frac{n + p + 1}{np} \times 100 \times k$$

Plusieurs algorithmes de compression SVD existent et plusieurs vidéos portant sur le fonctionnement de la compression SVD sont accessibles. La vidéo

<https://www.youtube.com/watch?v=H7qMMudo3e8>

de Steven L. Brunton est une vidéo de qualité.



The image is a composite of two parts. On the left, a man with glasses and a dark shirt stands in front of a chalkboard. The chalkboard contains the equation $\Sigma \approx U \Sigma_r V^T$ and some diagrams. On the right, a Jupyter Notebook interface is shown with the following Python code:

```
In [ ]: from matplotlib.image import imread
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import os
plt.rcParams['figure.figsize'] = [16, 8]

A = imread('dog.jpg')
X = np.mean(A, -1) # Convert RGB to grayscale

img = plt.imshow(256-X)
img.set_cmap('gray')
plt.axis('off')
plt.show()

In [ ]: U, S, VT = np.linalg.svd(X,full_matrices=False)
S = np.diag(S)

j = 0
for r in (5, 20, 100):
    # Construct approximate image
    Kapprox = U[:,0:r] @ S[0:r,0:r] @ VT[0:r,0:r]
    plt.figure(j+1)
    j += 1
    img = plt.imshow(256-Kapprox)
```

Il y a aussi des sites de compression SVD en ligne comme

<https://timbaumann.info/svd-image-compression-demo/>

sur lesquels on peut utiliser ses propres photos.



Image d'origine 416×619



$k = 10$ (4%)



$k = 50$ (20%)



$k = 80$ (32%)

Nombre de pixels image d'origine : 257.504

Nombre de pixels retenus avec $k = 50$: 51.800