

Algèbre linéaire 3
Feuille d'exercices 1
Ajout exercices avancés

Exercice 1: Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On note $\square$ et Δ les lois internes et externes qui font de E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On note e l'élément neutre pour $\square$ et $\bar{x}$ l'inverse de x pour $\square$. Donc:

- (i) (Associativité) $\forall x, y, z \in E, (x \square y) \square z = x \square (y \square z)$;
- (ii) (Élément neutre) $\forall x \in E, x \square e = e \square x = x$;
- (iii) (Inverse) $\forall x \in E, \exists \bar{x} \in E$ tel que $x \square \bar{x} = \bar{x} \square x = e$;
- (iv) (Caractère Abélien) $\forall x, y \in E, x \square y = y \square x$.

et aussi

- (1) (Distributivité dans $\mathbb{R}$) $\forall t, t' \in \mathbb{R}, \forall x \in E,$
$$(t + t')\Delta x = (t\Delta x) \square (t'\Delta x) ;$$
- (2) (Distributivité dans E) $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x, x' \in E,$
$$t\Delta(x \square x') = (t\Delta x) \square (t\Delta x') ;$$
- (3) (Associativité dans $\mathbb{R}$) $\forall t, t' \in \mathbb{R}, \forall x \in E,$
$$t\Delta(t'\Delta x) = (tt')\Delta x ;$$
- (4) (Neutralité) $\forall x \in E, 1\Delta x = x$.

Montrer que

- (P1) $\forall x \in E, 0\Delta x = e$;
- (P2) $\forall x \in E, (-1)\Delta x = \bar{x}$;
- (P3) $\forall t \in \mathbb{R}, t\Delta e = e$;
- (P4) $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in E, t\Delta x = e \Leftrightarrow t = 0$ ou $x = e$.

Exercice 2: On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réels. On note P, P_1, P_2, P_3 les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ donnés par

$$\begin{aligned} P &= X^3 + 3X^2 + X + 5, \\ P_1 &= 2X^3 + 3X^2 - X + 4, \\ P_2 &= X^3 + X^2 - X + 1, \\ P_3 &= X^3 + X^2 + X + 1. \end{aligned}$$

Montrer que P est combinaison linéaire des polynômes P_1 et P_2 mais qu'il n'est pas combinaison linéaire des polynômes P_1 et P_3 .