

Algèbre linéaire 3
Feuille d'exercices 3
Ajout exercices avancés

Exercice: On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2 .
Soit aussi

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

une matrice de $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même
donnée par $f(M) = AM$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(1) On note B_1, B_2, B_3, B_4 les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ données par

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quelle est
la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

(2) Montrer que f est linéaire.

(3) Déterminer la matrice de représentation de f dans $\mathcal{B}$.

(4) L'endomorphisme f est-il un isomorphisme ?

(5) Si maintenant

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

déterminer la matrice de représentation de f dans $\mathcal{B}$ et le noyau $\text{Ker}(f)$
de f . En donner une base. Quelle est sa dimension ?

(6) Déterminer $\text{Im}(f)$ dans les deux cas précédents.