Emmanuel Hebey **Année 2026-2027**
TD N^{0}4

Algèbre linéaire 3
Feuille d'exercices 4
Ajout exercices avancés

Exercice 1: On considère $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ deux matrices ayant respectivement 3 lignes et 2 colonnes pour A et 2 ligne et 3 colonnes pour B. On note f et g les ALCA (Application Linéaire Canoniquement Associée) de A et B, où l'ALCA d'une matrice est l'application linéaire entre espaces euclidiens qui a pour matrice de représentation dans les bases canoniques des espaces euclidiens considérés la matrice en question. On suppose que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Montrer que $BA = \mathrm{I}_2$, où I_2 est la matrice identité 2×2. Si on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ on pourra essayer de montrer que $\big(g(e_1), g(e_2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2: Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère l'endomorphisme $f \in \mathrm{End}\,(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ défini par

$$f(M) = AM \ .$$

On note $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où les B_i sont donnés par

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Que vaut $M_{\mathcal{BB}}(f)$? On note $f^\star$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont la matrice de représentation dans $\mathcal{B}$ vaut la transposée $M_{\mathcal{BB}}(f)^T$, donc qui est tel que $M_{\mathcal{BB}}(f^\star) = M_{\mathcal{BB}}(f)^T$. Que valent $f^\star(B_1)$, $f^\star(B_2)$ et $f^\star(B_1 + B_2)$? On note maintenant g l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$g(M) = f^\star(M) - MB$$

pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer $g(B_1)$. A-t-on que $f^\star(M) = f(M)^T$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?