Emmanuel Hebey **Année 2026-2027**
TD N^{0}5

Algèbre linéaire 3
Feuille d'exercices 5
Ajout exercices avancés

Exercice 1: On note $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus 3. On note $\mathcal{B} = (X^3, X^2, X, 1)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Soit aussi f l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par

$$f(P)(x) = 12\int_0^x P(t)dt - 3xP(x) + P'(x) + P(0)$$

pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ et écrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{BB}}(f)$ de f dans $\mathcal{B}$.

(2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. Qu'en déduit-on ?

(3) Etant donnés $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, résoudre le système

$$M_{\mathcal{BB}}(f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

d'inconnues x, y, z, t.

(4) Caractériser, en donnant sa matrice de représentation dans $\mathcal{B}$, l'application $g \in \mathrm{End}(\mathbb{R}_3[X])$ qui est telle que $f\big(g(P)\big) = P$ pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

(5) Trouver $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant que $f(P) = 1$.

Exercice 2: Soit f l'ALCA de la matrice A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} .$$

Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que $A^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.