

Algèbre linéaire 3
Feuille d'exercices 6
Ajout exercices avancés

Exercice 1: (1) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ trois réels. Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - a \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b) .$$

(2) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ des réels. On note $A = VdM_n$ la matrice de Vandermonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} .$$

C'est une matrice $n \times n$. Montrer que son déterminant vaut

$$\det(VdM_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) .$$

Sous quelles conditions (nécessaires et suffisantes) la matrice de Vandermonde est-elle inversible ?

Exercice 2: Soient A, B deux matrices $n \times n$ qui commutent et qui sont telles que

$$A^2 - 4AB + 4B^2 = I_n .$$

Quelles sont les valeurs possibles pour le déterminant de $A - 2B$? Donner des exemples, dans le cas $n = 2$, de tels A et B pour chacune des valeurs trouvées.

Exercice 3: Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degrés inférieurs ou égaux à n . On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ donnée par $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$. Soit aussi f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$f(P) = P + P'$$

pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Ecrire la matrice de représentation de f dans $\mathcal{B}$. Que vaut le déterminant de cette matrice ? Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = Q$. Le polynôme P est-il unique ?