**Emmanuel Hebey** **Année 2026-2027**
**TD N$^0$7 bis** **Algèbre linéaire 3**

**Feuille d'exercices 7 bis**
**Ajout exercices avancés**

**Exercice 1:** Soit $A$ une matrice réelle $n \times n$. On veut montrer que le rang $\mathrm{Rg}(A)$ de $A$ est égal au rang $\mathrm{Rg}(A^TA)$ de $A^TA$, où $A^T$ est la transposée de $A$.

**(1)** Montrer que pour tout vecteur colonne $X$ de $\mathbb{R}^n$, regardé comme une matrice réelle $n \times 1$, $X^TX = 0$ si et seulement si $X = 0$.

**(2)** Montrer que pour tout vecteur colonne $X$ de $\mathbb{R}^n$, $A^TAX = 0$ si et seulement si $AX = 0$.

**(3)** Conclure.

**Exercice 2:** Une matrice carrée réelle $A$ est dite antisymétrique si $A^T = -A$. Montrer qu'il n'y a qu'une seule valeur possible pour le rang d'une matrice antisymétrique non nulle $3 \times 3$. Quelle est cette valeur ?

**Exercice 3:** **(1)** Soient $p, s, q \in \mathbb{N}^\star$ des entiers non nuls, $A \in \mathcal{M}_{p,s}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{s,q}(\mathbb{R})$ et $C = AB$. Dans quel espace de matrices se trouve $C$ ? Montrer que $\mathrm{Rg}(C) \leq \min\big(\mathrm{Rg}(A), \mathrm{Rg}(B)\big)$, où $\mathrm{Rg}(A)$ désigne le rang de $A$, $\mathrm{Rg}(B)$ celui de $B$ et $\mathrm{Rg}(C)$ celui de $C$.

**(2)** Soient $n, r \in \mathbb{N}^\star$ deux entiers non nuls. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ deux matrices de rang $r$. Dans quel espace de matrices se trouve $AB$ ? Montrer que l'on peut faire mieux dans ce contexte de rangs maximaux que le résultat de la question précédente et montrer que le rang de $AB$ vaut précisément $r$.

**(3)** Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$ deux entiers non nuls. Soit $r \in \mathbb{N}$. Dans le même genre d'idées montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de rang $r$ et $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ est de rang $r$, alors $AB$ et $CA$ sont toutes deux de rang $r$.

**(4)** On veut maintenant montrer la réciproque de (2). Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang $r \geq 1$, alors il existe $A \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ deux matrices de rang $r$ avec $C = AB$.

**Exercice 4:** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée et soit $f \in \mathrm{End}\big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\big)$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donné par: $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$f(M) = AM - MA \ .$$

Montrer que l'on a toujours $\mathrm{Rg}(f) = 2$ sauf dans un cas très particulier.