Emmanuel Hebey **Année 2026-2027**
TD N^{0}8

Algèbre linéaire 3
Feuille d'exercices 8
Ajout exercices avancés

Exercice 1: Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels tels que $|a| \neq |b|$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{pmatrix} .$$

(1) Déterminer le rang de A.

(2) Si f est l'ALCA de A, montrer que 0 est valeur propre de f. Calculer la dimension de l'espace propre E_0 associé. En supposant par exemple que $a \neq 0$ donner une base de E_0.

(3) En considérant les vecteurs $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1, -1, 1, -1)$ et en supposant que $b \neq 0$ trouver deux autres valeurs propres λ et μ de f. Calculer la dimension des espaces propres E_λ et E_μ correspondant. Montrer que $E = E_0 \oplus E_\lambda \oplus E_\mu$.

(4) Si $b = 0$ trouver une autre valeur propre λ de f et calculer dès lors la dimension de l'espace propre E_λ correspondant. Montrer que $E = E_0 \oplus E_\lambda$.

(5) En supposant que $a \neq 0$, trouver une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f)$ est diagonale.

Exercice 2: **(1)** Soit A une matrice triangulaire supérieure $n \times n$ (inférieure reviendrait au même) et soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit f l'endomorphisme de E dans la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ dans $\mathcal{B}$ vaut A. Montrer que les valeurs propres de f sont exactement les termes sur la diagonale de A.

(2) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et soit $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E. On suppose que f a n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On note $E_1, \ldots, E_n$ les espaces propres correspondants. Montrer que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$. En déduire que f est diagonalisable et dire comment trouver une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

(3) On note $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est donné par

$$f(P) = P - (X+1)P' \ .$$

Montrer que f est diagonalisable.

(4) Cela change-t-il quelque chose si on remplace $\mathbb{R}_3[X]$ par $\mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}^\star$, dans la question précédente ?