Slides Images L2

Un peu de théorie

E. Hebey

Avril 2026

I. Le problème des moindres carrés

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice réelle $n \times p$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On veut résoudre des équations du type $Ax = b$ même quand elles n'ont pas de solution. C'est le problème des moindres carrés qui consiste à trouver la ou les solutions du problème de minimisation $\min_x \|Ax - b\|^2$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^p$. Ces minimums s'interprètent alors comme un possible meilleur choix, le meilleur des x, celui pour lequel la différence $Ax - b$ est la plus petite possible. Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \|Ax - b\|^2 \ .$$

Si $A = (a_{ij})$, $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, p]\!]$, alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \big((\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j) - b_i \big)^2 \ .$$

La fonction f est donc de classe C^∞ et on calcule sans difficulté

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 2 \sum_{i=1}^{n} (Ax - b)_i a_{ij} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = 2 \sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ik}$$

pour tous $j, k \in [\![1, p]\!]$ et en tout point $x \in \mathbb{R}^p$.

Lemme 0.1. *La fonction f est convexe:*

$$f\big((1-t)x + ty\big) \le (1-t) f(x) + t f(y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^p$ et tout $t \in [0, 1]$.

Preuve. On écrit que

$$\begin{aligned} f\big((1-t)x + ty\big) &= \big\|(1-t)Ax + tAy - b\big\|^2 \\ &= \big\|(1-t)(Ax - b) + t(Ay - b)\big\|^2 \end{aligned}$$

puisque $b = (1-t)b + tb$. Par inégalité triangulaire,

$$\big\|(1-t)(Ax - b) + t(Ay - b)\big\| \le (1-t)\|Ax - b\| + t\|Ay - b\| \ .$$

Il suffit donc de montrer que $x \mapsto x^2$ est convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui est vrai. Pour ceux qui ont fait un peu d'analyse convexe en une variable réelle, la dérivée seconde de $x \to x^2$ est positive, donc la fonction est convexe. Sinon on écrit que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}&(1-t)^2x^2 + t^2y^2 + 2(1-t)txy - (1-t)x^2 - ty^2 \\ &= t(t-1)\big(x^2 + y^2 + 2xy\big) \le 0 \ .\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Lemme 0.2. *Pour une fonction convexe différentiable, minimums et points critiques coïncident.*

Preuve. Les minimums sont des points critiques, convexité ou pas. Reste à montrer que les points critiques d'une fonction convexe sont des minimums. Si f est convexe,

$$\frac{f\big(x + t(y-x)\big) - f(x)}{t} \le f(y) - f(x) \tag{0.1}$$

pour tous x, y et tout $t \in]0,1]$. Or

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f\big(x + t(y-x)\big) - f(x)}{t} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i) \ .$$

Si x est un point critique de f, cette limite vaut zéro et on obtient en passant à la limite en $t \to 0^+$ dans (0.1) que $f(y) \ge f(x)$ pour tout y. D'où le résultat. □

Lemme 0.3. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ vecteur colonne et tout $y \in \mathbb{R}^n$ vecteur colonne*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle \ ,$$

où A^T est la transposée de A, le produit scalaire dans le membre de gauche est le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$ et dans le membre de droite le produit scalaire dans $\mathbb{R}^p$.

Preuve. Cette relation se vérifie très facilement: si $A = (a_{ij})$ et $A^T = (b_{k\ell})$,

$$\begin{aligned}\langle Ax, y \rangle &= \sum_{i=1}^n \Big[\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j\Big] y_i \\ \langle x, A^T y \rangle &= \sum_{k=1}^p x_k \Big[\sum_{\ell=1}^n b_{k\ell} y_\ell\Big] \ .\end{aligned}$$

En notant i au lieu de ℓ et j au lieu de k, on obtient

$$\langle x, A^T y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p b_{ji} x_j y_i$$

et comme $b_{ji} = a_{ij}$ on retrouve bien l'égalité. □

Lemme 0.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La matrice $A^T A$ est une matrice carrée $p \times p$. Elle est symétrique et positive au sens où les valeurs propres de $A^T A$ sont toutes positives ou nulles. Si de plus ker$(A) = \{0\}$, les valeurs propres de $A^T A$ sont toutes strictement positives et la matrice $A^T A$ est inversible.*

Preuve. Que $A^T A$ soit carrée $p \times p$ est immédiat. Comme $(AB)^T = B^T A^T$ on voit que $A^T A$ est symétrique. Si λ est valeur propre de $A^T A$ alors il existe $x \neq 0$ vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$ tel que $A^T A x = \lambda x$. Avec le Lemme 0.3,

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax \rangle \\ &= \langle x, A^T A x \rangle \\ &= \lambda \|x\|^2 \ , \end{aligned} \tag{0.2}$$

où le premier produit scalaire est le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$, le second celui de $\mathbb{R}^p$. Donc $\lambda \geq 0$. De plus, si $\lambda = 0$ est valeur propre de $A^T A$ alors $Ax = 0$ en vertu de ce que l'on vient décrire. Donc forcément $\lambda > 0$ si $\ker(A) = \{0\}$. Le théorème spectral donne que $A^T A = PDP^T$ où P est une matrice orthogonale $p \times p$ et où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ est la matrice diagonale constituée des valeurs propres de $A^T A$ répétées avec leur multiplicité. Si $\ker(A) = \{0\}$ alors $\lambda_i > 0$ pour tout i. Donc D est inversible. Donc $A^T A$ est un produit de trois matrices inversibles. Donc inversible. $\square$

Théorème 0.1. *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice réelle $n \times p$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Les minimiseurs dans $\mathbb{R}^p$ de $\|Ax - b\|^2$ sont précisément les solutions de l'équation dite "normale"*

$$A^T A x = A^T b \ .$$

Si ker$(A) = \{0\}$, le minimiseur est unique et donné par $a = (A^T A)^{-1} A^T b$. La matrice $A^\dagger = (A^T A)^{-1} A$ est appelée pseudo-inverse de Moore-Penrose de A.

Preuve. La fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \|Ax - b\|^2$ est C^∞ et convexe (Lemme 0.1). Les minimiseurs de f, s'ils existent, sont donc (Lemme 0.2) les points critiquent de f, ceux pour lesquels $\nabla f(x) = 0$, où $\nabla f(x)$ est le gradient de f en x, donc le vecteur de $\mathbb{R}^p$ de coordonnées les $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $j \in [\![1, p]\!]$. Pour $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ différentiable, $Df(x).(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle$ pour tout $h \in \mathbb{R}^p$. Or, avec le Lemme 0.3,

$$\begin{aligned} Df(x).(h) &= 2\langle Ax - b, Ah \rangle \\ &= 2\langle A^T(Ax - b), h \rangle \end{aligned}$$

et donc, $\nabla f(x) = 2A^T(Ax - b)$. Ainsi x est un minimiseur pour f si et seulement si $A^T A x = A^T b$. Si $\ker(A) = \{0\}$, $A^T A$ est inversible et l'équation a donc une et une unique solution donnée par $x = (A^T A)^{-1} A^T b$. $\square$

Dans le cas général, hors condition $\ker(A) = \{0\}$, il n'y a pas unicité de la solution. Les solutions sont tout de même toujours données par le pseudo-inverse de Moore-Penrose, mais qui prend alors une forme plus compliquée que $(A^T A)^{-1} A$.

II. Décomposition SVD

On définit les valeurs singulières d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ comme étant les racines carrées des valeurs propres de $A^T A$. La matrice $A^T A$ est une matrice $p \times p$ qui est symétrique et positive (Lemme 0.4). En remarquant, voir l'équation (0.2), que $A^T Ax = 0$ équivaut à $Ax = 0$, et donc que $\ker(A^T A) = \ker(A)$, on obtient avec le théorème du rang que le rang de A est égal au rang de $A^T A$. Par théorème spectral, $A^T A$ est la matrice diagonale des valeurs singulières de A sont équivalentes. Le rang de $A^T A$ est donc égal au nombre de valeurs singulières strictement positives de A. On en déduit que le nombre de valeurs singulières strictement positives de A est égal au rang de A. La décomposition SVD est donnée par le théorème suivant.

Théorème 0.2 (Décomposition SVD)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang r. Soient $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r$ les r valeurs singulières strictement positives de A. Il existe alors $U \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonales pour lesquelles*

$$A = V \Sigma_r U^T \ ,$$

où $\Sigma_r \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice blocs constituée de Diag$(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ en bloc haut à gauche et de blocs nuls pour les trois autres.

Si $\mathrm{Diag}_r = \mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ on a donc

$$\Sigma_r = \begin{pmatrix} \mathrm{Diag}_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix} \ ,$$

où $0_{a,b}$ est la matrice nulle $a \times b$.

Preuve. C'est la même que celle du cours pour les matrices carrées. $\square$